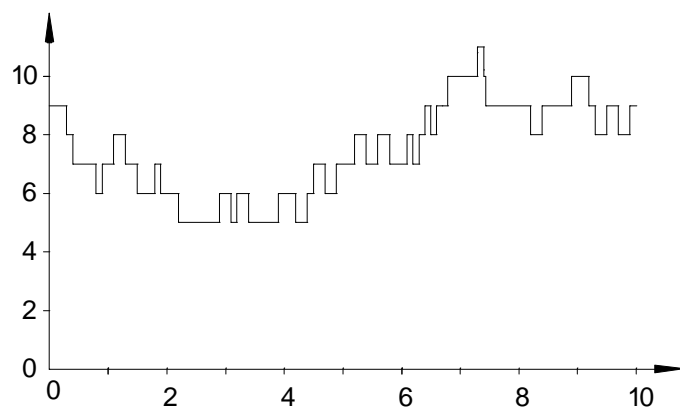


JOHDANTO

Tämä opintojakson Tiedonvälitystekniikka 2 liikenneteoreettinen osuus pyrkii sisältämään melko laajan katsauksen televerkkojen liikenneteoreettisiin käytännön ongelmiin ja niiden ratkaisumenetelmiin. Varsinaisia pohjatietoja ei juurikaan oleteta, vaikka osa asioista onkin esitetty tietoliikennetekniikan perusteiden opintojaksossa ja todennäköisyyslaskennan yhteydessä. Tavoitteena on lähinnä luoda kuva erilaisista liikenteellisistä ilmiöistä televerkoissa, niiden mallintamisesta ja mallien ratkaisemisesta käytettävistä menetelmistä. “Kuva” merkitsee tässä yhteydessä sitä, että teletekniikan parissa työskentelevällä henkilöllä on riittävä ymmärrys tarkastelluista ilmiöistä, jotta hän voi soveltaa joitakin peruskaavoja ja malleja esimerkiksi teleteknisten järjestelmien mitoitukseen. Erityisen keskeistä on ymmärtää yksinkertaisten mallien likimääräisyys kuvattaessa todellista verkkoa ja sen liikennettä. Opintojakson luo, toivottavasti, jonkinlaisen pohjan vaativampien liikennemallien ymmärtämiseen ja soveltamiseen.

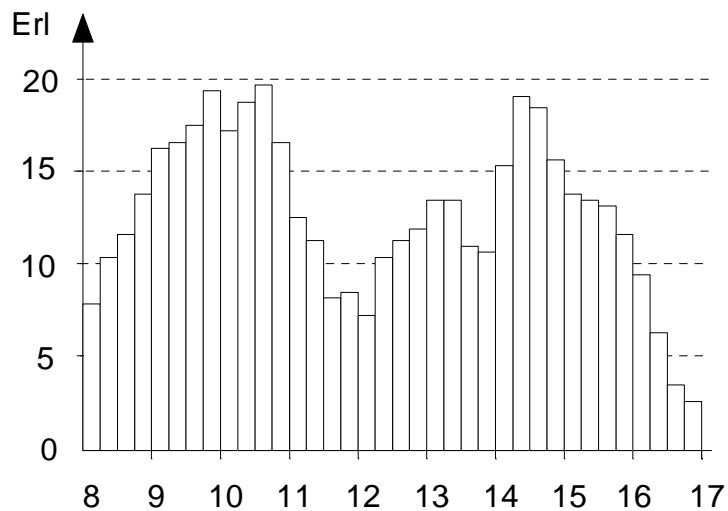
Teleliikenneteorian perustavaa laatua oleva tavoite on kuvata ja mallintaa mahdollisimman yksinkertaisella tavalla liikenteen vaihteluita ajan funktiona. Eräs tähän tehtävään liittyvä keskeinen ongelma, jota hieman pyrin tämänkin opintojakson puitteissa valottamaan, on hyvin monivivahteisen todellisuuden ja varsin yksinkertaisten matemaattisten mallien välinen suhde. Kuvassa 0.1. on esitetty simuloimalla muodostettu liikenneprosessi lyhyellä aikajaksolla (prosessin tulkinta voi olla esimerkiksi varattuina olevien puhelinyhteyksien määrä jossain puhelinverkon siirtojärjestelmässä). Tässä tapauksessa simulointia varten tarvitaan vain kaksi parametriä (tulevien puhelujen intensiteetti ja puhelujen keskipituus) ja pari oletusta siitä minkälaisen prosessin mukaisesti puhelut saapuvat ja loppuvat. Todellista puhelinliikennettä voidaan mitata jollain väylällä muutama minuutti ja tulos voi näyttää hyvin samankaltaiselta. Onko malli sitten riittävän hyvä jos tuloksia ei voida silmämääräisesti toisistaan. Tämä kysymys on aiheellinen ja opintojakson kuluessa vastauskin toivottavasti selkenee.



Kuva 0.1. Simuloidun liikenteen vaihtelua lyhyellä tarkastelujaksolla.

Jotta esitettyyn kysymykseen voitaisiin vastata, on ensiksikin ymmärrettävä ne kriteerit joita käytetään mallien ja tulosten arvioimiseen ja lisäksi on oltava käsitys liikennemallien rakenteesta ja niiden avulla saatavista tuloksista. Näitä kysymyksiä tarkastellaan ensimmäisessä luvussa.

Yksinkertaisimmillaan liikenteen tarkastelu rajoitetaan yhteen liikenneväylään. Näin on käytännön syistä usein perusteltua tehdä, vaikka tilanne ei vastaakaan todellisuutta. Luvussa 2 esitetään kaksi kysymystä joihin ei voida vastata ilman verkkotason tarkastelua, nimittäin: miten sallittu kokonaisuus kannattaa jakaa verkon sisällä; ja miten mitoitetaan väylä jolle tulee ylivuotavaa liikennettä. Yksinkertaiset liikennemallit edellyttävät sitä, että asiakkaat käyttäytyvät tietyllä tavalla ideaalisesti, mikä ei valitettavasti vastaa todellisuutta. Luvussa 3 tarkastellaan lähinnä sitä, miten asiakas reagoi, kun hän ei saakaan palveluaan välittömästi ja miten tähän liittyviä ilmiöitä voidaan mallintaa. Toinen olennaisesti liikenteeseen vaikuttava tekijä, jota yksinkertaiset mallit eivät ota huomioon, on se, että liikenneprosessi riippuu yleensä ajasta (kuva 0.2). Aikariippuvuutta ja sen vaikutuksia verkon mitoitukseen käsitellään luvussa 4.



Kuva 0.2. Liikenteen riippuvuus vuorokaudenajasta.

Suosituksen mukainen puhelinverkon liikennemittaus suoritetaan kymmenenä peräkkäisenä työpäivänä yleensä 15 minuutin keskiarvoina (kuva 0.2). Tällöin siis oletetaan, että liikenne käyttäytyy jokaisena päivänä likimain samalla tavalla, jolloin liikennettä voidaan tarkastella keskiarvojen avulla. Mittaustulosten tulkintaa ja erityisesti niiden tarkkuutta käsitellään luvussa 5. Mittaustulokset kuvaavat sellaisenaan aina menneisyyttä, sensijaan operaattori on kiinnostunut enemmänkin tulevaisuudesta. Ennustamista varten tarvitaan tietoja liikenteen pitkäaikaisesta kehityksestä, tätä pyritään tarkastelemaan luvun 5 loppuosassa.

1. LIIKENNETEORIAN PERUSTEISTA

Tässä esitettävä liikenneteorian perusteiden osuus on paljolti sama kuin tietoliikennetekniikan perusteissa, tämä version on kuitenkin editoitu kokonaisuudessaan ja alkuperäiseen tekstiin on sekä lisätty että siitä on poistettu joitakin osia.

Liikenneteorian perustavoitteena on jonkun järjestelmän palvelun tason määrittäminen. Estojärjestelmässä palvelun tasoa kuvaa puhelun estymisen todennäköisyys eli **esto**. Estoa voidaan tarkastella useasta näkökulmasta, esimerkiksi satunnaisen tarkkailijan, (keskimääräisen) asiakkaan tai järjestelmän kannalta.

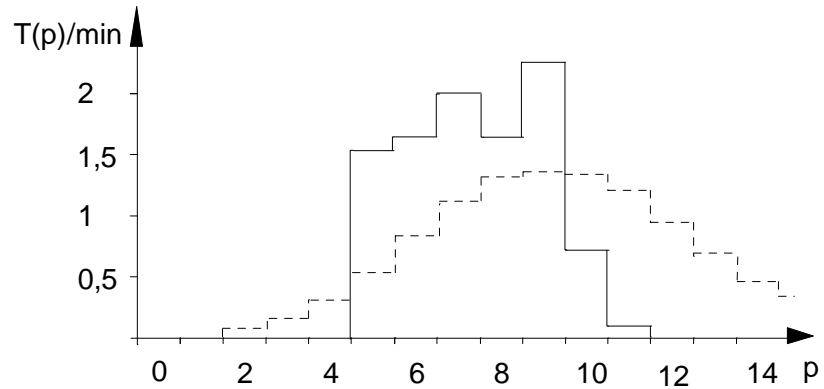
Satunnainen tarkkailija ei tiedä muun liikenteen käyttäytymisestä mitään. Voidaan siis ajatella, että otetaan näytteitä järjestelmän tilasta ja kysytään: millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitulla ajan hetkellä järjestelmän kaikki palvelupaikat ovat varattuja? Tästä todennäköisyydestä käytetään nimitystä **aikaesto**. Aikaesto liittyy myös läheisesti Poisson-prosessiin, voidaan nimittäin osoittaa että Poisson-prosessin mukaisesti tulevat kutsut näkevät aina aikakeskiarvot, jollainen mm. aikaesto on.

Asiakkaan kannalta on oleellista pääseekö hän palveltavaksi vai ei. Tätä epäonnistumisen todennäköisyyttä kuvataan **kutsuestolla**. Kutsuesto lasketaan yleensä kaikkien kutsujen keskiarvona; eri asiakkaiden käyttäytyminen voi kuitenkin olla erilaista, jolloin myös eri asiakkaiden kokemat estot ovat erilaisia.

Järjestelmän kannalta on tärkeää kuinka suuri osa tarjotusta liikenteestä menetetään, koska esimerkiksi veloitus määräytyy välitetyn liikenteen perusteella. Menetetyn liikenteen osuutta kuvataan **liikenne-estolla**. Samoin kuin kutsuestonkin tapauksessa myös liikenne-esto riippuu kunkin asiakkaan käyttäytymisestä. Matemaattisissa malleissa liikenne-esto voidaan laskea helposti, sen sijaan todellisesta liikenteestä sitä on hyvin vaikea mitata, koska on käytännössä on hyvin vaikea määrittää yhtä aikaa sekä tarjotun liikenteen arvoa (jolloin palvelupaikkoja on oltava riittävästi) ja välitettyä liikennettä (kun palvelupaikkoja on rajallinen määrä).

Matemaattisia määritelmiä

Tässä esitetään vain joitakin todennäköisyyslaskennan perusasiota, jotka ovat välttämättömiä liikenteen kuvaamisen kannalta. Liikennettä voidaan tarkastella esimerkiksi laskemalla tai mittaamalla eri tilojen kestoajoja. Kuvassa 1.1 on esitetty kuvan 0.1 liikenteen tilojen kestoajat sekä katkoviivalla esitetty teoreettinen jakauma.



Kuva 1.1. Kuvassa 0.1 esitetyn liikenteen tilojen jakauma (katkoviivalla teoreettinen jakauma, kun simulointiaika lähestyy ääretöntä)

Tämäkin kuvan 1.1 esitystapa, vaikka onkin huomattavasti kuvassa 0.1 esitettyä tiiviimpi, on melko työläs ja hankala käsitellä silloin kun televerkossa on suuri joukko väyliä ja jokaisella väylällä on runsaasti erilaisia tiloja. Jakauman kuvaus voi yleensä perustua muutamaankin parametriin, jos jakauman muoto on riittävän "tavanomainen". Tarkastellaan diskreettiä satunnaismuuttujaa x , joka voi saada arvoja $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$. Jokaisella arvolla on todennäköisyys $\Pr\{x_j\}$. Nämä todennäköisyydet muodostavat jakauman, jolle voidaan laskea tunnuslukuja, joista yleisimmin käytettyjä ovat odotusarvo (E) ja varianssi (V):

$$E\{x\} = \sum_j x_j \Pr\{x_j\} \quad (1.1)$$

$$V\{x\} = E\{x^2\} - E^2\{x\} \quad (1.2)$$

Liikenneteoriassa varianssin ohella käytetään usein myös tunnuslukuja huippukerroin (z) ja hajontakerroin (c):

$$z = V\{x\}/E\{x\} \quad (1.3)$$

$$c = \sqrt{V\{x\}}/E\{x\} \quad (1.4)$$

Liikenteen kuvaaminen

Edellä esitetyt tunnusluvut voidaan suhteellisen hyvin määrittää tekemällä riittävä määrä liikennemittauksia, sensijaan mittaustulosten ja muutaman parametrin perusteella ei voida laskea paljoakaan. Tähän tarvitaan matemaattinen malli, joka kuvaa mahdollisimman hyvin mitattua liikennettä. Mallia voidaan sitten käyttää liikennettä koskevissa laskelmissa. Liikenteen malleja voidaan rakentaa monella tasolla kuten yksittäisten asiakkaiden käyttäytymisen kuvaaminen, liikenne asiakkaiden virtana ja liikenne järjestelmän tilojen muutoksina.

Yhden asiakkaan tarkastelu

Yhden asiakkaan (esim. puhelun) käyttäytymistä voidaan kuvata erilaisten tapahtumien todennäköisyyksillä. Esimerkiksi jos puhelin on vapaa, alkaa uusi puhelu seuraavan sekunnin aikana tietyllä todennäköisyydellä tai vastaavasti jos puhelu on käynnissä, se päättyy seuraavan sekunnin aikana jollain todennäköisyydellä. Nämä todennäköisyydet voivat riippua erilaisista tekijöistä kuten ajankohdasta ja aikaisemmista mahdollisesti epäonnistuneista puheluista jne. Yksinkertaisimmillaan voidaan olettaa, että nämä todennäköisyydet ovat ajasta ja muista tekijöistä riippumattomia vakioita. Tässä esityksessä näille todennäköisyyksille on käytetty "pilkullisia" merkintöjä, joista tärkeimmät ovat:

y' = vapaan lähtee kutsuintensiteetti

u' = yhden asiakkaan palveluintensiteetti

Voidaan myös sanoa, että u' on intensiteetti, jolla asiakkaita poistuu yhdestä palvelupaikasta, silloin kun asiakas on paikalla. Eli jos palvelupaikka täytetään heti kun edellinen asiakas on poistunut, poistuu asiakkaita keskimäärin u' kappaletta aikayksikössä. Vastaavasti y' kuvaa todennäköisyyttä, että uusi puhelu alkaa, kun puhelin on vapaa. Asiakkaan käyttäytymistä voidaan kuvata aikoina, jonka asiakas keskimäärin viettää eri paikoissa. Erityisesti asiakkaan palvelupaikassa viettämää aikaa, palveluaikaa, merkitään lyhenteellä h .

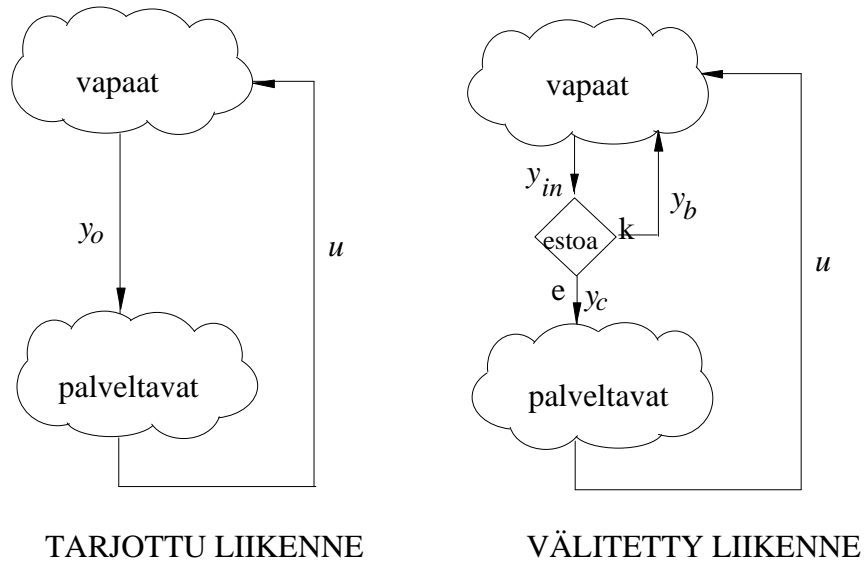
Liikenne virtana

Teleoperaattori tarkastelee teleliikennettä yleensä kokonaisuutena. Tällöin ollaan kiinnostuneita siitä kuinka paljon asiakkaita siirtyy paikasta toiseen tai kuinka monta puhelua alkaa ja päättyy, kuinka monta estyy tai joutuu jonottamaan jne. Liikennevirtoja kuvataan tässä esityksessä "pilkuttomilla" merkinnöillä:

y = palvelupaikkaan tulevien asiakkaiden määrä aikayksikössä,

u = palvelupaikasta lähtevien asiakkaiden määrä aikayksikössä.

Puhelinliikenteessä tarkastelun perustan muodostaa puhelujen muodostuminen: miten paljon tulee uusia kutsuja ja miten paljon puheluita päättyy. Kuvassa 1.2 on esitetty yksinkertaistetut mallit tarjotulle ja välitetylle liikenteelle. ITUn (entisen CCITT) suositusten mukaan **tarjottu liikenne** on se liikenne, joka saadaan, kun mitään häiritseviä tekijöitä ei ole.



Kuva 1.2. Tarjottu ja välitetty liikenne.

Tarjotulle liikenteelle voidaan käyttää alaindeksiä **o** (offered), esimerkiksi y_o = tarjottu liikennevirta, joskin useimmiten tarjotun liikenteen tapauksessa ei käytetä mitään alaindeksiä, jos sekaannuksen vaaraa ei synny. Välitetylle liikenteelle käytetään alaindeksiä **c** (carried) ja estyneelle liikenteelle **b** (blocked) ja mitatulle liikenteelle **m** (measured). Lisäksi välittyä liikennettä tarkasteltaessa käytetään alaindeksiä **in**, jolla kuvataan järjestelmään tulevaa liikennevirtaa, silloin kun osa liikenteestä estyy (y_o ja y_{in} voivat erota toisistaan esimerkiksi estyneiden kutsujen uusiutumisen vuoksi). Kirjallisuudessa käytetyt merkinnät vaihtelevat suuresti.

Mittauksilla voidaan selvittää välitetyn liikenteen ominaisuudet, sen sijaan on vaikea mitata tarjottua liikennettä tai estyneiden kutsujen palveluaikoja todellisesta liikenteestä. Tällöin voidaan esimerkiksi olettaa, että tarjottujen, välitettyjen ja estyneiden kutsujen palveluajat ovat yhtä pitkiä.

Jos asiakkaita ei kerääny mihinkään kohtaan järjestelmää, tulee pitkällä aikavälillä jokaiseen paikkaan tulla yhtä paljon asiakkaita kuin siitä poistuu. Eli esimerkiksi kuvan 1.2 välitetyn liikenteen tapauksessa tulee olla:

$$y_{in} = y_c + y_b \quad (1.5)$$

Järjestelmän tilat

Liikennevirtojen kuvaaminen ei kuitenkaan riitä, jos halutaan laskea esimerkiksi puhelun estymisen todennäköisyys. Tällöin on tarkasteltava järjestelmän tiloja. Järjestelmä voi olla esimerkiksi vaihteen keskusjohdot, jolloin tiloja ovat "ei yhtään johtoa varattuna", "yksi johto varattuna", "kaksi johtoa varattuna" jne. Eri tilojen todennäköisyyksien määrittäminen voi tapahtua mittaamalla (mallin tai todellisen) liikenteen tiloja jollakin

aikajaksolla (T) ja laskemalla kunkin tilan (x) keskimääräinen esiintymisaika $T\{x\}$. Mikäli kyseessä on malli, voidaan tilan x todennäköisyys määrittellä raja-arvona:

$$\Pr\{x\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T\{x\}}{T} \quad (1.6)$$

Tila x voi merkitä esimerkiksi sitä, että järjestelmässä on x asiakasta palveltavana tai että jonossa on x asiakasta. Jos järjestelmä on mutkikkaampi voi tilan määritelmä olla monimutkaisempi.

Ajan lähestyminen äärettömyyttä on jossain tilanteissa harhaanjohtavaa, varsinkin jos tarkastellaan ajasta riippuvia tapahtumia. Tällaisessa tapauksessa voidaan käyttää - ajattelun apuna - käsitettä mahdollinen maailma. Tietty joukko mahdollisia maailmoja toteuttaa ennalta asetetut oletukset ja osassa näistä toteutuu tarkasteltu tapahtuma. Tapahtuman x todennäköisyydeksi hetkenä t oletuksilla E voidaan määrittellä:

$$\Pr\{x, t\} = \frac{N\{E, x, t\}}{N\{E\}} \quad (1.7)$$

$N\{E, x, t\}$ on niiden maailmojen määrä, joissa tapahtuma x toteutuu hetkenä t oletusten joukon E ollessa voimassa ja $N\{E\}$ on oletukset E täyttävien maailmojen kokonaismäärä. Kaava 1.7 on käytännön laskujen kannalta monella tavoin hankala; lähinnä se vastaa kysymykseen mitä ollaan laskemassa ja saattaa siten johdattaa sopivan laskentatavan löytämiseen.

Käytännön ongelmia ratkottaessa mallissa tarvittavien tilojen määrä voi olla hyvinkin suuri, jos pyritään mahdollisimman suureen tarkkuuteen. Ongelman ratkaisemisen kannalta on usein kuitenkin edullisempää pyrkiä kuvaamaan todellisuus mahdollisimman pienellä määrällä suureita. Näitä suureita ovat aikaisemmin esitetyt jakauman tunnusluvut. Jos satunnaismuuttuja on esimerkiksi varattuina olevien johtojen (tai kanavien ym.) määrä (p), saadaan **liikenteen odotusarvo** eli lyhyesti sanottuna liikenne:

$$A = E\{p\} \quad (1.8)$$

Liikenteen intensiteetin yksikkönä käytetään yleensä **Erlangia** (Erl), vaikkakin liikenne on oikeastaan suureeton mitta. Joskus tarvitaan myös käsitettä liikennemäärä joka saadaan kertomalla Erlangit sopivalla aikasuureella eli esimerkiksi $Erl \cdot h$. Vastaavasti liikenteen varianssi määritellään:

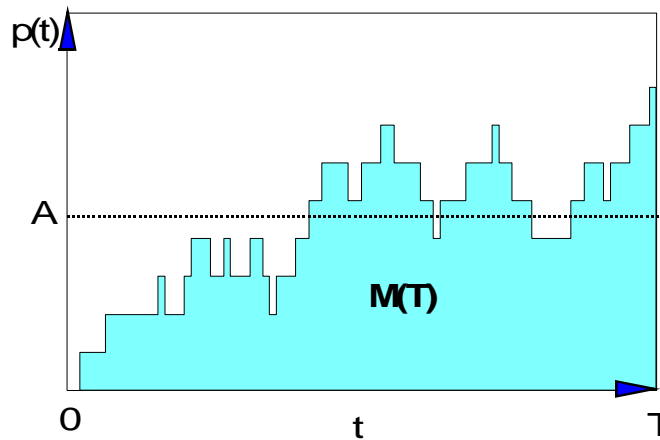
$$V = V\{p\} \quad (1.9)$$

Sen yksikkö on Erl^2 , joskaan tällaista merkintää ei yleensä käytetä.

Kuvausten yhdistäminen

Entä miten nämä eri kuvaustavat liittyvät toisiinsa, erityisesti meitä kiinnostaa se miten liikenne (A) suhtautuu keskimääräiseen palvelun kestoan (h) ja keskimääräiseen kutsu-intensiteettiin (y). Kuvassa 1.3 esitetty erään liikenneprosessin realisaatio välillä $(0, T)$. Oletetaan että alkuhetkellä $t=0$ liikenteen arvo (esimerkiksi varattuina olevien johtojen määrä) on 0. Liikenteen arvo $p(t)$ muuttuu ajan mukana sen mukaan miten uusia asiakkaita saapuu ja asiakkaiden palvelu päättyy. Merkitään tulevien kutsujen kokonaismäärää välillä $(0, T)$ $Y(T)$:llä ja liikennemäärää $M(T)$:llä:

$$M(T) = \int_0^T p(t) dt \quad (1.10)$$



Kuva 1.3. Eräs liikenneprosessin realisaatio

Keskimääräinen liikenne A ja keskimääräinen kutsuintensiteetti y laskettuina ajan T yli ovat siten:

$$A(T) = \frac{\int_0^T p(t) dt}{T} = \frac{M(T)}{T} \quad (1.11)$$

$$y(T) = \frac{Y(T)}{T} \quad (1.12)$$

Keskimääräistä puhelun pituutta laskettaessa on otettava huomioon myös jakson lopussa kesken jääneet puhelut, joiden määrä on $p(T)$. Merkitään näiden puheluiden keskimäärin jäljellä olevaa palveluaikaa h' :lla. Tällöin:

$$\begin{aligned}
 h(T) &= \frac{M(T) + p(T)h'}{Y(T)} \\
 &= \frac{A(T)T + p(T)h'}{y(T)T} \\
 &= \frac{A(T)}{y(T)} + \frac{p(T)h'}{y(T)T}
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

Kun T kasvaa kohti ääretöntä, jälkimmäinen termi lähestyy nollaa, jos $p(T)$ ja h' ovat rajallisia eikä $y(T)$ lähesty nollaa (nämä oletukset voidaan yleensä tehdä kaikissa käytännön tapauksissa). Näin saatavat raja-arvot (kun $T \rightarrow \infty$) ovat liikenteen malleissa esiintyvät parametrit A , y ja h , joita sitoo siten yhtälö:

$$A = yh \tag{1.14}$$

Tätä yhtälöä kutsutaan **Little'n lauseeksi**, joka, kuten edellä esitetyn, ei aivan yksityiskohtaisen tarkastelun perusteella voidaan havaita, pätee varsin yleisesti. Oleellisia edellytyksiä kaavan pätevyydelle on nähdäkseni kaksi. Ensiksikin liikenne ei saa kasvaa systemaattisesti ajan lähestyessä ääretöntä (huom. tällä tavoin voi käydä jonotusjärjestelmissä, jos keskimääräinen kuormitus ylittää palvelukapasiteetin). Toiseksi, keskimääräisen palveluajan tulee olla rajallinen.

Lisäksi Little'n lausetta sovellettaessa on muistettava, että y ja h tulee laskea samoista asiakkaista tai kutsuista. Esimerkiksi tilanteessa, jossa osa kutsuista estyy, on tämä otettava huomioon joko kutsuintensiteetissä (lasketaan vain välitetyt kutsut) tai keskimääräisessä palveluajassa (estyneiden kutsujen palveluaika on nolla).

Edellä esitetyn tarkastelun pohjalta voidaan vielä käsitellä y :n ja u :n sekä h :n ja u' :n välisiä suhteita. Päättävien kutsujen määrä aikana T on:

$$U(T) = Y(T) - p(T) \tag{1.15}$$

Keskimääräinen palveluintensiteetti laskettuna aikajakson $(0, T)$ yli on siten:

$$\begin{aligned}
 u(T) &= \frac{U(T)}{T} \\
 &= \frac{Y(T)}{T} - \frac{p(T)}{T} \\
 &= y(T) - \frac{p(T)}{T}
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

Jälleen T :n kasvaessa kohti ääretöntä saadaan (edellyttäen että $p(T)$ on äärellinen):

$$u = y \tag{1.17}$$

Tämä on hyvin looginen tulos ja voitaisiin ajatella, että sitä ei olisi edes tarpeen johtaa. Kaavan johtamisesta on, yleensä, se hyöty, että sen avulla voidaan paljastaa ne edellytykset joiden vallitessa kaava on voimassa. Erityisesti edellä kuvatuissa tapauksissa oleellista on se että aikajakson T oletetaan aina kasvavan äärettömäksi, jotta kaavat pitäisivät tarkasti paikkaansa — sensijaan todellinen liikenne tapahtuu aina äärellisen ajan puitteissa. Tämä on lähes väistämätön hyppäys kun todellisuutta pyritään kuvaamaan teoreettisella mallilla: mallien parametrit, kuten tarjottu liikenne A , koskevat useinkin aikajaksoja, joiden pituus lähestyy ääretöntä.

Parametrin u' kaltaiset suureet ovat hankalampia kuin esimerkiksi u , koska ne eivät liity varsinaisesti pitkän aikavälin keskiarvoon vaan niiden arvot on tunnettava mallien muodostamista ja ratkaisemista varten jokaisella ajan hetkellä. Siirtyminen pitkän aikavälin parametreistä hyvin lyhyisiin on mahdollista helposti ainoastaan jos oletamme että tapahtumat jakautuvat tasaisesti sekä koko aikajaksolle että eri asiakkaiden välille. Tällöin voidaan kirjoittaa seuraava yhtäläisyys:

$$\begin{aligned} u'(T) &= \frac{U(T)}{M(T)} \\ &= \frac{Y(T) - p(T)}{A(T)T} \\ &= \frac{y(T)T - p(T)}{y(T)h(T)T} \\ &= \frac{1}{h(T)} - \frac{p(T)}{y(T)h(T)T} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Jälleen viimeinen termi lähestyy nollaa T :n lähestyessä ääretöntä, kunhan riittävät edellytykset ovat voimassa. Tällöin keskimääräisen palveluajan ja yhden asiakkaan palveluintensiteetin välinen suhde on:

$$h = 1/u' \tag{1.19}$$

Tämä kaava käyttökelpoinen oikeastaan vain silloin kun palveluajan jakauma on eksponentiaalinen, sillä muutoin u' :ta ei voida olettaa vakioksi.

Palvelun tason kuvaaminen

Palataan vielä käytännön ongelmiin ja tavoitteisiin. Palvelujärjestelmä voi olla vaikkapa puhelinvaihteen keskusjohdot ja liikenne puhelinliikennettä tai vastaavasti ravintola ja sen asiakkaat. Kutsuvirroista pyritään siis laskemaan eri tilojen todennäköisyydet ja niiden avulla palvelun taso. Aikaisemmin esitetyt estojen määritelmät olivat hieman

hataralla pohjalla, koska käsitteitä ei oltu määritelty. Nyt estot voidaan määritellä seuraavasti:

Aikaesto on todennäköisyys, että järjestelmän kaikki palvelupaikat ovat varattuja:

$$B_t = P\{p = S\} \quad (1.20)$$

Kutsuesto on estyneiden kutsujen suhde järjestelmään tuleviin kutsuihin:

$$B_c = \frac{y_b}{y_{in}} \quad (1.21)$$

Liikenne-esto on tarjotun liikenteen ja välitetyn liikenteen erotuksen suhde tarjottuun liikenteeseen:

$$B_a = \frac{A_o - A_c}{A_o} \quad (1.22)$$

Nämä määritelmät koskevat suoranaisesti liikenteen malleja, kuitenkin aikaeston ja kutsueston määritelmät soveltuvat sellaisenaan myös mitattaessa todellista liikennettä.

Mallintaminen

Miten liikenneteoreettisia laskuja suoritetaan? Eräs tapa lähestyä asiaa on rakentaa matemaattinen malli annettujen tietojen pohjalta. Tässä luvussa tarkastellaan esimerkinomaisesti kahta mallia. Näiden mallien avulla on tarkoitus antaa kuva siitä, miten liikenneteoreettisia malleja voidaan rakentaa ja ratkaista.

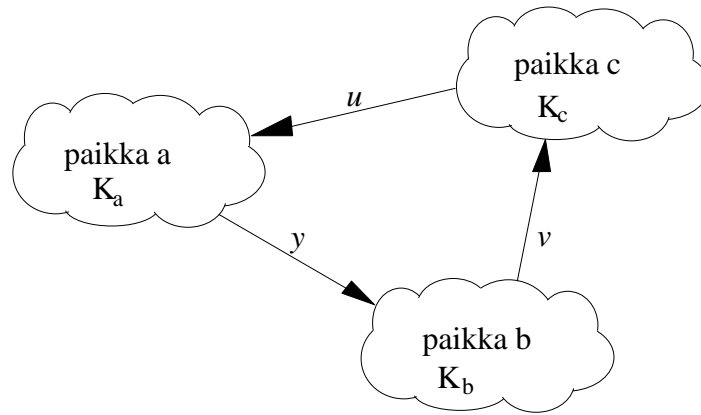
MALLI 1.

Olkoon järjestelmässä kolme paikkaa (a , b ja c), joissa on yhteensä kaksi asiakasta. Asiakkaat kulkevat järjestelmässä reittiä $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a \Rightarrow$, kuitenkin siten, että paikassa c saa olla ainoastaan yksi asiakas kerrallaan. Asiakkaiden kulkemisesta tiedetään seuraavaa:

1. Mikäli asiakas on paikassa a hetkellä t , hän siirtyy tilaan b todennäköisyydellä $y' dt$ aikavälissä $(t, t+dt)$ ja vastaavasti $b \Rightarrow c$ todennäköisyydellä $v' dt$ (jos paikka c on vapaa) sekä $c \Rightarrow a$ todennäköisyydellä $u' dt$.

2. Nämä todennäköisyydet ovat kaikilla ajan hetkillä samoja ja asiakkaat kulkevat toisistaan riippumatta (lukuunottamatta ehtoa, että c :ssä saa olla vain yksi asiakas).

Näiden tietojen pohjalta voidaan jo rakennella mallia. Aloitetaan periaatekaaviosta, josta nähdään miten asiakkaat voivat kulkea, kuva 1.4.



Kuva 1.4. Mallin 2 periaatekaavio.

Kaaviossa on käytetty merkintöjä y , v ja u ilman pilkkua: näillä merkinnöillä tarkoitetaan asiakasvirtojen aikakeskiarvoja. Eli pitkän ajan T kuluessa tapahtuu siirtymisiä paikasta a paikkaan b keskimäärin yT . Mikäli mihinkään paikkaan ei kasaannu asiakkaita tulee näiden keskiarvojen luonnollisesti olla samoja (vastaa siis sähkötekniikassa Kirchoffin lakia):

$$y = u = v$$

Miten nämä merkinnät suhtautuvat pilkullisiin merkintöihin y' , u' ja v' ? Pilkulliset merkinnät (tämä ei ole mikään standardimerkintä vaan ainoastaan johdonmukainen tässä monisteessa) merkitsevät sitä, että tarkastellaan yhtä asiakasta tietyssä tilassa. Merkitään paikassa a keskimäärin olevien asiakkaiden määrää $E\{K_a\}$. Tällöin pätee:

$$y = y'E\{K_a\} \tag{1.23}$$

mikäli asiakas voi siirtyä vapaasti (kaava ei päde suoraan siirryttäessä paikasta b paikkaan c). Lisäksi voidaan olla kiinnostuneita siitä, kuinka kauan asiakas viettää aikaa (kerrallaan) jossain tilassa: keskimääräisiä aikoja merkitään h_a , h_b ja h_c . Tiedetään esimerkiksi, että paikkaan c tulee asiakkaita pitkällä aikavälillä (T) yhteensä vT kappaletta ja yhteensä nämä asiakkaat viettävät c :ssa $E\{K_c\}T$ aikayksikköä. Keskimääräinen aika, jonka asiakas viettää c :ssa on siten:

$$h_c = E\{K_c\}/v \tag{1.24}$$

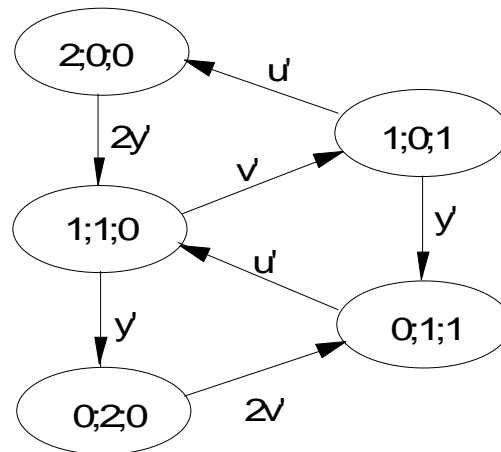
Tämä ei kuitenkaan ole oikeastaan vielä muuta kuin Littlen lauseen soveltamista. Pitemmälle menevää laskemista varten on tunnettava järjestelmän mahdolliset tilat. Tässä tapauksessa voidaan havaita, että kumpikin asiakas voi olla kolmessa eri paikassa (a , b ja c), joten erilaisia kombinaatioita on yhteensä 9 kappaletta. Näistä kuitenkin on kielletty tila, jossa molemmat asiakkaat ovat paikassa c . Lisäksi, koska asiakkaita ei

eroteltu toisistaan, osa tiloista on järjestelmän kannalta samanarvoisia. Jäljelle jää järjestelmän kannalta katsottuna 5 erilaista tilaa:

$$(2;0;0), (1;1;0), (1;0;1), (0;2;0), (0;1;1)$$

jossa esimerkiksi $(1;0;1)$ merkitsee, että paikassa a on yksi asiakas ja paikassa c on yksi asiakas.

Tästä eteenpäin tarvitsemme oletusta että kaikki aikajakaumat ovat eksponentiaalisia, jolloin erittäin lyhyessä aikavälissä dt voi tapahtua vain yksi siirtyminen. Tilat ja niiden väliset mahdolliset siirtymiset on esitetty kuvassa 1.5.



Kuva 1.5. Mallin 2 tilansiirtokaavio.

Mitä mallin perusteella sitten halutaan laskea? Ensiksikin voidaan olla kiinnostuneita siitä millä todennäköisyydellä järjestelmä on eri tiloissa eli, jos tarkastellaan pitkää aikaväliä kuinka suuren osan ajasta järjestelmä on jossain tilassa. Merkitään tilojen todennäköisyyksiä:

$$\Pr\{2;0;0\}, \Pr\{1;1;0\}, \Pr\{1;0;1\}, \Pr\{0;2;0\}, \Pr\{0;1;1\}$$

Näiden tilojen esiintymistodennäköisyyksien laskemista varten tehdään kaksi tärkeää oletusta:

1. Asiakkaat pyrkivät siirtymään toiseen paikkaan eksponentiaalisesti jakautunein väliajoin.
2. Laskelmissa tarkastellaan vain **tasapainotilaa**.

Ensimmäinen oletus seuraa alussa annetuista asiakkaista koskevista tiedoista (y' , u' ja v' ovat vakioita). Ratkaistaan esitetty malli loppuun asti tapauksessa, jossa $y' = u' = v' = 1$. Tällöin saadaan yhtälöt:

$$\begin{aligned} \Pr\{1;0;1\} &= 2 \Pr\{2;0;0\} \\ \Pr\{1;1;0\} &= 2 \Pr\{0;2;0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr\{1;1;0\} &= 2 \Pr\{1;0;1\} \\ \Pr\{0;1;1\} &= 2 \Pr\{0;2;0\} + \Pr\{1;0;1\} \\ \Pr\{2;0;0\} + \Pr\{1;1;0\} + \Pr\{1;0;1\} + \Pr\{0;2;0\} + \Pr\{0;1;1\} &= 1 \end{aligned}$$

Näistä yhtälöistä voidaan ratkaista tilojen todennäköisyydet:

$$\begin{aligned} \Pr\{2;0;0\} &= 1/15 \\ \Pr\{1;1;0\} &= 4/15 \\ \Pr\{1;0;1\} &= 2/15 \\ \Pr\{0;2;0\} &= 2/15 \\ \Pr\{0;1;1\} &= 6/15 \end{aligned}$$

Eri paikoissa on siten keskimäärin asiakkaita:

$$\begin{aligned} E\{K_a\} &= 8/15 \\ E\{K_b\} &= 14/15 \\ E\{K_c\} &= 8/15 \end{aligned}$$

Voidaan myös tarkistaa ovatko keskimääräiset siirtymät yhtä suuria:

$$\begin{aligned} y = E\{K_a\}y' &= 8/15 \\ u = E\{K_c\}u' &= 8/15 \end{aligned}$$

Mutta entä v , jossa täytyy ottaa huomioon myös ehto, että paikassa c ei voi olla kahta asiakasta. Tilatodennäköisyyksien avulla saadaan:

$$v = \Pr\{0;2;0\}2v' + \Pr\{1;1;0\}v' = 8/15$$

Tämä on siis laskelman tulos järjestelmän kannalta. Jos tilannetta tarkastellaan asiakkaiden kannalta, voidaan kysyä: kuinka suuren osan ajasta asiakas viettää jossain paikassa tai kuinka pitkään asiakas on kerrallaan tiettyssä paikassa? Tilassa a on keskimäärin $8/15$ asiakasta, joten tietty asiakas viettää paikassa a $4/15$ osan ajastaan ja vastaavasti paikassa b $7/15$ ja paikassa c $4/15$. Entä minkä ajan asiakas viettää tiettyssä tilassa? Tämä voidaan laskea Littlen kaavalla:

$$\begin{aligned} h_a &= E\{K_a\}/u = 1 \\ h_b &= E\{K_b\}/y = 7/4 \\ h_c &= E\{K_c\}/v = 1 \end{aligned}$$

h_a ja h_b ovat eksponentiaalisesti jakautuneita, sensijaan h_c ei sitä ole.

Järjestelmä voidaan ajatella palvelujärjestelmäksi, jossa paikka c on palvelupaikka ja paikat a ja b kuvaavat asiakkaan käyttäytymistä. Paikka b ei ole varsinaisesti jonotuspaikka, koska asiakas ei siirry välittömästi palveltavaksi vaan pikemminkin voidaan

ajatella että asiakas pyrkii palveltavaksi paikkaan c sellaisen ajan jälkeen joka muodostuu kahden eksponentiaalisesti jakautuneen ajan summana.

Voidaan esimerkiksi kysyä, kuinka paljon huonompi kahden asiakkaan järjestelmä on verrattuna järjestelmään, jossa on vain yksi asiakas? Tähän kysymykseen voitaisiin vastata seuraavalla tavalla. Tarkastellaan ensin yhden asiakkaan järjestelmää. Tällöin kyseinen asiakas on paikassa c kolmasosan ajasta (kun $y' = u' = v'$). Kahden asiakkaan järjestelmässä kyseinen asiakas saa palvelua vain $4/15$ osan ajasta eli hän menettää:

$$\frac{1/3 - 4/15}{1/3} = 1/5$$

palveluajastaan. Voitaisiin siis sanoa, että palvelun taso on laskenut 20 % tai että liikenne-esto on 20 %.

Toinen mahdollisuus on tarkastella siirtymisiä: asiakashan on tilassa b $7/15$ osan ajastaan ja voidaan ajatella, että hän yrittää jatkuvasti palvelupaikkaan c intensiteetillä v' . Kuitenkin osa tästä ajasta on sellaista, että paikka c on varattu, jolloin asiakkaan yritys on turha. Turhia yrityksiä siirtyä tilaan c tapahtuu aikayksikköä kohti:

$$1 \Pr\{0;1;1\} = 6/15$$

Vastaavasti onnistuneita yrityksiä tapahtuu (kuten aikaisemmin jo laskettiin) $8/15$. Estyneiden kutsujen osuus (eli kutsuesto) on siten:

$$B_c = 6/(6+8) = 43\%$$

Myös tämä suure kuvaa palvelun tasoa. Vielä voidaan määritellä aikaesto todennäköisyydeksi, että paikassa c on asiakas, jolloin:

$$B_t = \Pr\{1;0;1\} + \Pr\{0;1;1\} = 53\%$$

Mutta mihin kysymykseen aikaesto on vastaus? Tässä tapauksessa sillä ei ole oikeastaan mitään merkitystä tarkastellun kahden asiakkaan kannalta, sensijaan jos jokin ulkopuolinen asiakas pyrkii palvelupaikkaan (c) satunnaisella hetkellä, aikaesto kertoo estymisen todennäköisyyden.

Erlangin kaava

Kertauksenomaisesti esitetään vielä Erlangin kaavan johtaminen. Oletetaan tunnetuiksi kutsuintensiteetti (γ) sekä yhden palvelupaikan palveluintensiteetti (μ , josta edellä on käytetty merkintää u'). Keskimääräinen puhelun pituus on siis $h = 1/\mu$. Tarjottu liikenne saadaan soveltamalla Littlen lausetta (1.14): $A = \gamma h$.

Lisäksi oletetaan, että tulevat kutsut eivät riipu toisistaan eikä aikaisemmasta liikenteestä; tähän sisältyy oletus että puhelun pituus on eksponentiaalisesti jakautunut (joskaan puhelun pituuden jakaumalla ei tässä tapauksessa ole vaikutusta lopputulokseen eli Erlangin kaavaan). Tavoitteena on ensin laskea eri tilojen todennäköisyydet. Tarkastellaan kahta ajanhetkeä t ja $t+dt$. Koska liikenteen oletettiin olevan riippumaton ajasta, tulee liikenteen jakautumien olla yhtenevät eli:

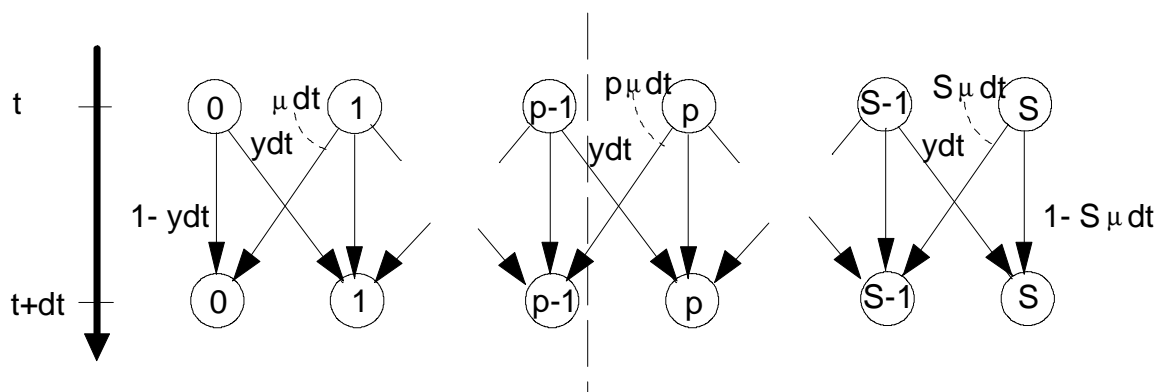
$$\Pr\{p,t\} = \Pr\{p,t+dt\} ; p = 0,1,2,\dots \quad (1.25)$$

Oletetaan, että järjestelmä on tilassa p ajanhetkenä t . Aikaväli dt olkoon niin lyhyt, että siirtymisien voidaan olettaa tapahtuvan vain peräkkäisten tilojen välillä (yhdessä aikavälissä sattuu vain yksi tapahtuma). Tällöin saadaan seuraavat todennäköisyydet aikavälillä dt :

- siirrytään tilaan $p+1$ todennäköisyydellä: $y dt$
- siirrytään tilaan $p-1$ todennäköisyydellä: $(p\mu) dt$
- ei siirtymisiä todennäköisyydellä: $1-(y+p\mu) dt$

HUOM: tässä tapauksessa todennäköisyydet voidaan laskea suoraan yhteen, koska dt oletetaan erittäin pieneksi.

Vastaava graafinen esitys on kuvassa 1.6. Kuvaan on merkitty kahden tilan väliin poikki-viiva. Koska jakaumien oletetaan olevan identtisiä, tulee myös näiden kahden puoliskon todennäköisyyksien olla yhtä suuria ajanhetkinä t ja $t+dt$. Tätä voi yrittää ymmärtää esimerkiksi siten että siirtymisiä tilasta "korkeintaan neljä puhelua käynnissä" tilaan "vähintään viisi puhelua käynnissä" tulee yhtä paljon kuin siirtymisiä toiseen suuntaa (ero voi olla korkeintaan yksi siirtyminen).



Kuva 1.6. Tilojen muutokset aikavälissä $(t,t+dt)$.

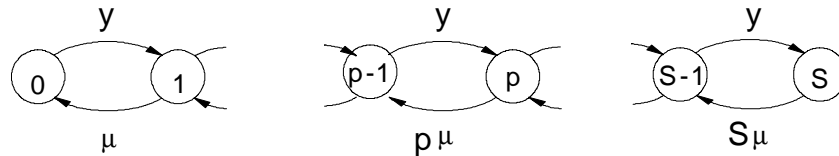
Vastakkaisiin suuntiin tapahtuvien siirtymisien tulee siten olla keskimäärin yhtä suuria:

$$y dt \Pr\{p-1\} = p\mu dt \Pr\{p\} \quad (1.26)$$

eli

$$y \Pr\{p-1\} = p \mu \Pr\{p\} \quad (1.27)$$

joka voidaan esittää kuvan 1.7 mukaisella tavalla. Mikäli tarkastellaan vain tasapainotilaa, voidaan jälkimmäinen kuva piirtää ilman kuvan 1.6 välivaihetta.



Kuva 1.7. Tasapainotilan kaavio satunnaisella liikenteellä.

Kuvan perusteella saadaan rekursiivinen yhtälö:

$$\Pr\{p\} = A \Pr\{p-1\}/p ; p = 1,2,\dots \quad (1.28)$$

Näiden avulla voidaan ratkaista tilojen todennäköisyydet, kun lisäksi tiedetään, että todennäköisyyksien summan tulee olla yksi:

$$\sum_{i=0}^S \Pr\{p = i\} = 1 \quad (1.29)$$

Tarjotun liikenteen jakauma saadaan, kun palvelupaikkojen määrä on ääretön:

$$\Pr_o\{p = i\} = \frac{e^{-A} A^i}{i!} \quad (1.30)$$

Kyseessä on **Poisson-jakauma** ja vastaavasti edellä esitetyt ehdot täyttävää liikennettä kutsutaan Poisson-liikenteeksi. Poisson-jakaumalla on se erityisominaisuus, että sen keskiarvo ja varianssi ovat yhtä suuria eli $E\{p\} = A = V$, jolloin huippukerroin $z = 1$. Tähän perustuu myös huippukertoimen käyttö liikenteen ominaisuuksien kuvaamisessa: jos huippukerroin on suurempi kuin 1 liikenteen vaihtelut ovat voimakkaampia kuin Poisson-liikenteellä ja vastaavasti vähäisempiä kun $z < 1$.

Kun palvelupaikkoja on äärellinen määrä (S), välitetyn liikenteen jakauma saadaan samalla rekursiokaavalla kuin tarjottukin liikenne (1.28). Todennäköisyys, että kaikki palvelupaikat ovat varattuja ($p=S$), on samalla määritelmän mukaisesti aikaesto:

$$B_E = \frac{A^S/S!}{\sum_{i=0}^S A^i/i!} \quad (1.31)$$

Tästä kaavasta käytetään nimitystä **Erlangin estokaava**. Erlangin kaava antaa sekä aika-, kutsu- että liikenne-eston, kunhan liikenteen luonnetta koskevat oletukset ovat voimassa.

2. VERKKOTASON TARKASTELUN PERUSKYSYMYKSIÄ

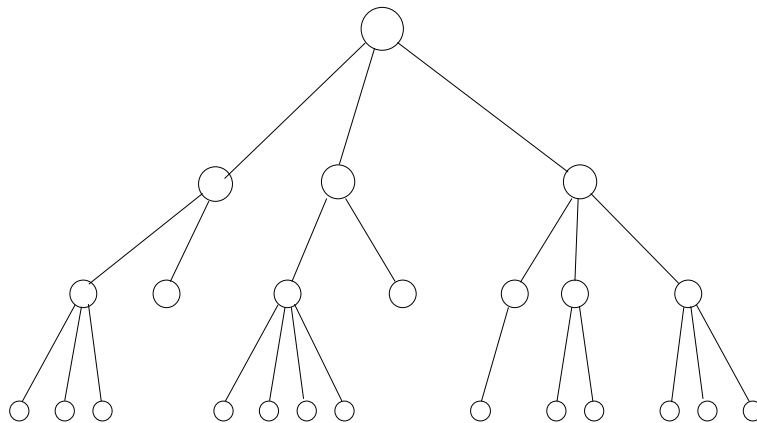
Tässä esitetty hyvin suppea tarkastelu muodostaa johdatuksen televerkon kokonaismitoitukseen, kun Erlangin kaavan oletukset ovat voimassa. Televerkon mitoitus voidaan usein ymmärtää optimointitehtävänä, jossa kustannuksia aiheuttavat välitys- ja siirtojärjestelmät ja reunaehtona on tietty palvelutaso, joka yleensä määritellään estyvien kutsujen osuutena. Voidaan joko ajatella, että palvelutasosta on hyötyä (palvelusta maksetaan ja paremmasta palvelusta maksetaan enemmän) tai sitten, että palvelun täytyy ylittää tietty taso.

Tarkastellaan ensiksi yhden väylän tapausta. Sitä voidaan käsitellä **Moen periaatteen** avulla. Ajatellaan tilannetta, jossa väylän johtolukua lisätään yhdellä. Välitetty liikenne kasvaa tällöin seuraavan funktion mukaisesti:

$$f[A, S] = A(B_a[A, S] - B_a[A, S+1]) \quad (2.1)$$

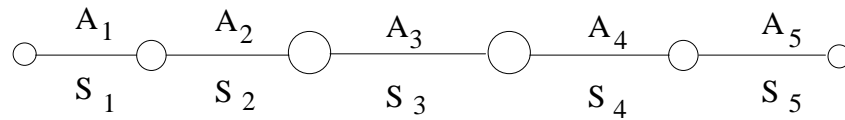
Poisson-liikenteen tapauksessa liikenne-esto saadaan Erlangin estokaavalla. Tällä periaatteella voidaan arvioida vastaako lisäjohdosta saatava hyöty siitä aiheutuvia kustannuksia: johtoja kannattaa lisätä niin kauan kuin hyöty on suurempi kuin kustannukset. Joskaan kysymys ei oikeastaan ole siitä, että välitetty liikenne juurikaan lisääntyisi (johtuen estyneiden kutsujen uusiutumisesta) vaan palvelun tason paranemisesta.

Samaa periaatetta voidaan soveltaa myös optimoitaessa kuvan 2.1 tyyppistä verkkoa, jossa päästä-päähän yhteyden kokonaisuus on määrätty. Kysymys on tällöin siitä kuinka kokonaisuus kannattaa jakaa eri portaiden kesken.



Kuva 2.1 Hierarkinen verkko.

Yleisessä muodossa esitetyn tyyppisen verkon optimointi on vaikea. Verkkoa voidaan kuitenkin approksimoida säännöllisellä verkolla, jolloin saadaan kuvan 9.2 mukainen kaavio.



Kuva 2.2 Säännöllisen verkon liikenteen kaavio.

Kuvan 2.2 tapauksessa voidaan Moen periaatetta soveltaa siten, että johtoja lisätään sille tasolle, jolla saavutetaan suurin eston pienentyminen kustannusyksikköä kohti. Johtoja lisätään tällä periaatteella kunnes saavutetaan tavoiteltu kokonaisuus. Toisin sanoen lasketaan kullekin verkon tasolle (*i*) eston pieneminen kustannusyksikköä kohti:

$$H_i = \frac{B[A_i, S_i] - B[A_i, S_i + 1]}{M_i c_i} \quad (2.2)$$

jossa M_i = tason *i* yhteyksien määrä
 c_i = yhden johdon kustannus tasolla *i*
 A_i = tarjottu liikenne yhdellä yhteydellä tasolla *i*

Näistä H_i :stä valitaan suurin ja tälle tasolle lisätään 1 johto. Tämän jälkeen lasketaan koko yhteyden esto, joka voidaan yleensä laskea suoraan summaamalla eri tasojen estot (mikäli estot ovat pieniä):

$$B = \sum B_i \quad (2.3)$$

Johtojen lisäämistä jatketaan kunnes alitetaan asetettu kokonaisuus. Vaikka näin ei saavuteta välttämättä täsmälleen optimaalista ratkaisua, päästään yleensä hyvin lähelle sitä. Käytännössä joudutaan luonnollisesti ottamaan huomioon se, että kanavia lisätään yleensä suuremmissa portaissa kuin yksi kanava.

Esimerkki 2.1.

Optimoidaan taulukon 2.1 mukainen verkko, kun päästä-päähän yhteydelle on määrätty suurimmaksi estoksi 3%.

Taulukko 2.1. Esimerkkiverkon parametrit.

taso	määrä M_i	kustannus per johto c_i	liikenne A_i / Erl
1	50	1000	3
2	5	2000	25
3	1	3000	100
4	10	2000	12
5	100	1000	2

Oletetaan liikenteen olevan Poisson-prosessin mukaista, jolloin estot voidaan laskea Erlangin estokaavalla. Johtomäärien alkuarvot saadaan laskemalla kullakin liikenteen arvolla 3%:n estoa vastaava johtomäärä. Tulokset on esitetty taulukossa 2.2. Taulukossa on esitetty myös vastaavat estot sekä esto, kun kullekin tasolle lisätään yksi johto. Johdon lisäämisen aiheuttama lisäkustannus ($M_i c_i$) on esitetty sarakkeessa 5 ja vastaava "hyötysuhde" (H_i) viimeisessä sarakkeessa.

Taulukko 2.2. Esimerkkiverkon optimoinnin alkuarvot.

taso	S	B[S] %	B[S+1] %	Kust. Mmk	Lisäkust. kmk	H %/Mmk
1	7	2,19	0,81	350	50	0,03
2	33	2,28	1,65	330	10	0,06
3	110	2,75	2,41	330	3	0,11
4	18	2,65	1,65	360	20	0,05
5	6	1,21	0,34	600	100	0,01
yht.		11,08		1970		

H_j :n arvoista on suurin tasolla 3, joten johdon lisääminen on kannattavinta sille. Johtoja lisätään tasolle 3, kunnes sen hyötysuhde tulee pienemmäksi kuin seuraavaksi suurin H_j (= 0,06 tasolla 2). Näin jatketaan kunnes kokonaisesto laskee alle 3%:n. Lopputulokset on esitetty taulukossa 2.3.

Taulukko 2.3. Esimerkkiverkon optimoinnin loppuarvot.

taso	S	B[S] %	Kustannus Mmk
1	8	0,81	400
2	39	0,23	390
3	126	0,16	378
4	21	0,56	420
5	6	1,21	600
yht.		2,96	2188

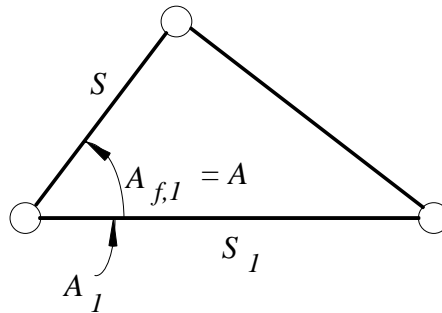
Tuloksista nähdään se, että optimiratkaisussa suuriliikenteisillä väylillä esto on pienempi kuin pieniliikenteisillä väylillä, vaikka johtokohtainen kustannus onkin suurempi. Tämä on varsin yleispätevä tulos, jota on syytä soveltaa vaikka verkon kustannuksia ei tarkkaan voitaisi laskeakaan. Mikäli jokaiselle verkon tasolle olisi määriteltä yhtä suuri sallittu esto (0,6%), saataisiin kokonaiskustannuksiksi 2300 Mmk eli 5% enemmän kuin optimoimalla saatavalla ratkaisulla. Vaikka 5% voi tuntua pieneltä niin on muistettava että puhelinverkon kokonaisinvestoinnit Suomessa ovat parin miljardin markan luokkaa vuodessa.

Ylivuotoliikenne

Kuvassa 2.1 esitetty verkko ei vastaa kovinkaan hyvin oikeaa puhelinverkkoa, sillä useimmat televerkot ovat ainakin jollain tasolla silmukoituja, eli eri solmujen välillä on useita reittejä. Jos ensisijainen reitti on estynyt jostain syystä, liikenne voidaan tällöin ohjata vaihtoehtoiselle reitille. Tällaisessa tapauksessa Erlangin kaavaa ei voida sovel-

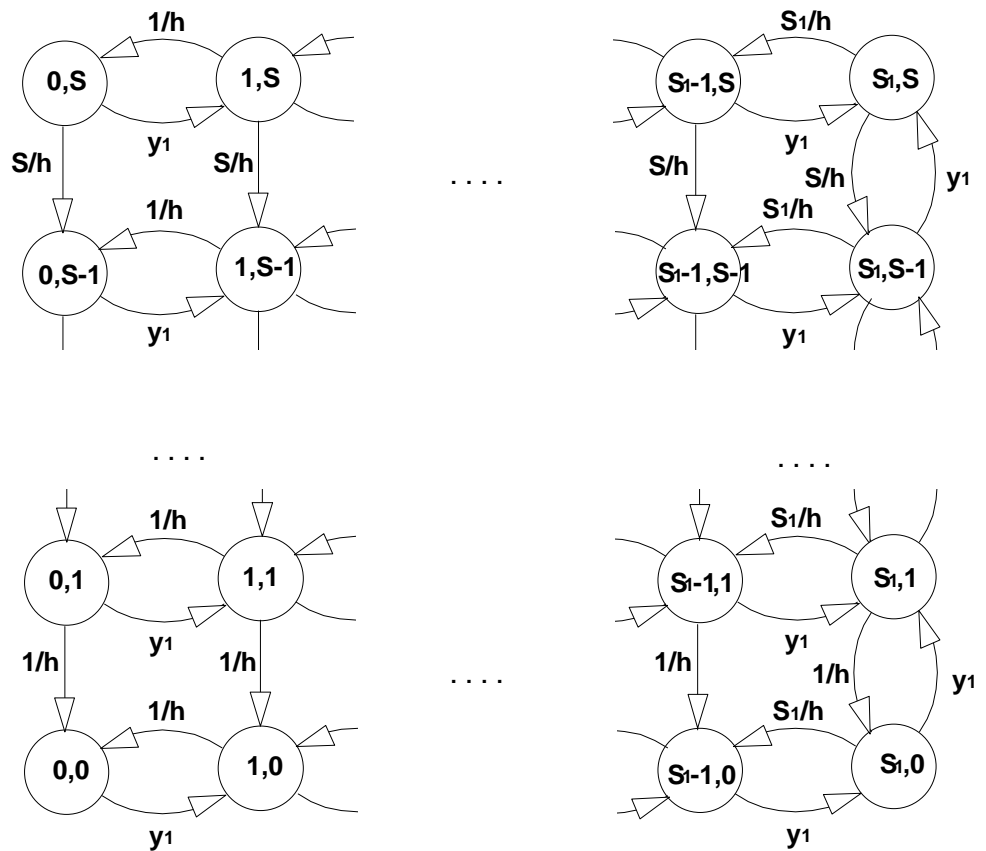
taa vaihtoehdoisen väylän mitoituksessa, koska sille tarjottava liikenneprosessi poikkeaa luonteeltaan huomattavasti Poisson-liikenteestä.

Tarkastellaan kuvan 2.3 mukaista tilannetta. Siinä väylälle 1 (ensisijainen väylä, S_1 johtoa) tarjotaan Poisson-liikennettä (odotusarvo A_1), josta osa estyy. Estynyt liikenne ohjataan vaihtoehdoiselle väylälle (S johtoa). Vaihtoehdoista väylää koskevat merkinnät on tässä esityksessä ilman alaindeksiä, koska juuri vaihtoehdoisen väylä on mitoituksen kohteena eli pyrimme laskemaan sille tarjotun liikenteen sekä (kutsu)eston.



Kuva 2.3. Vaihtoehdoisen väylöityä ja ylivuoto liikenne.

Tarjotut kutsut ohjataan ensisijaiselle väylälle, mikäli sillä on vapaita palvelupaikkoja ($p_1 < S_1$) ja muutoin vaihtoehdoiselle väylälle ($p_1 = S_1$). Liikenteelle voidaan piirtää siten kuvan 2.4 mukainen tasapainotilan kaavio.



Kuva 2.4. Ylivuoto liikenteen tasapainotilan kaavio.

Kuvan 2.4 tilatodennäköisyydet $Pr[p_I, p]$ voidaan ratkaista. Lausekkeet ovat varsin monimutkaisia eikä niitä yleensä käytännön laskuissa käytetä. Tähän on syynä myös se, että yleensä ollaan kiinnostuneita estoista eikä tilatodennäköisyyksistä ja tarkasteltavassa tapauksessa liikenne-esto voidaan laskea kohtuullisen helposti.

Tarkastellaan ensin väylältä 1 ylivuotavaa liikennettä. Ylivuotavan liikenteen keskiarvo ($A_{f,1}$) saadaan Erlangin estokaavan avulla:

$$A_{f,1} = A_1 B_E[A_1, S_1] \quad (2.4)$$

Tämä liikenne tarjotaan vaihtoehtoiselle väylälle eli:

$$A_o = A_{f,1} \quad (2.5)$$

Tarkastellaan seuraavaksi koko järjestelmän liikennettä yhdessä, jolloin palvelupaikkojen määrä on $S_I + S$. Tämän järjestelmän liikenne-esto voidaan laskea Erlangin estokaavalla:

$$B_a[S_1+S] = B_E[A_1, S_1+S] \quad (2.6)$$

Ylivuotoväylältä estyvä liikenne on:

$$A_b = A_1 B_a[S_1+S] \quad (2.7)$$

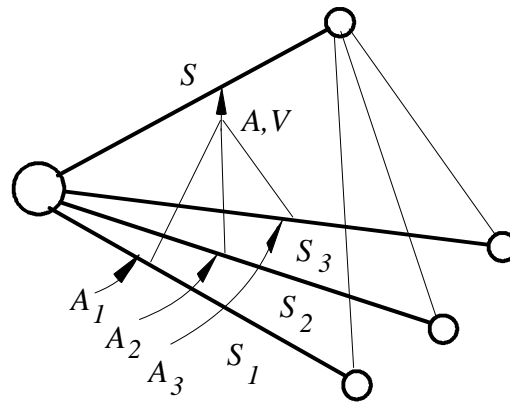
Ylivuotoväylän liikenne-estoksi saadaan siten:

$$B_a = \frac{B_E[A_1, S_1+S]}{B_E[A_1, S_1]} \quad (2.8)$$

Tämä kaava antaa sekä liikenne- että kutsueston. Sensijaan ylivuotoväylän aikaestoa ei voida laskea kovin helposti (huom: kaava 2.6 antaa todennäköisyyden, että molemmat väylät ovat täynnä eikä todennäköisyyttä että ylivuotoväylä on täynnä).

Equivalent Random Theory (ERT)

Edellä esitetyssä yksinkertaisessa ylivuotoliikenteen tapauksessa kutsuesto voidaan laskea täsmällisesti ja helposti. Käytännössä tilanne on kuitenkin monimutkaisempi. Esimerkiksi kuvassa 2.5 ylivuotoväylälle tarjotaan liikennettä usealta eri väylältä.



Kuva 2.5. Tyypillinen vaihtoehdoisen väylöityksen kaavio.

Tällaisessa tapauksessa on pyrittävä kuvaamaan vaihtoehdoiselle väylälle tarjottavan liikenteen ominaisuudet. Yksinkertainen ja samalla käyttökelpoinen tapa tarjotun liikenteen keskiarvon ja varianssin laskeminen. Kultakin väylältä ylivuotavan liikenteen keskiarvo saadaan kaavalla 2.7. Myös ylivuotoliikenteen varianssin kaava on tunnettu:

$$V_{f,1} = A_{f,1} \left(1 - A_{f,1} + \frac{A_1}{S_1 + 1 - A_1 + A_{f,1}} \right) \quad (2.9)$$

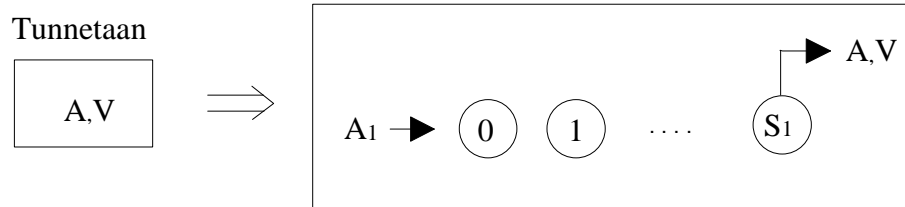
Vaihtoehdoiselle väylälle tarjotun liikenteen keskiarvo ja varianssi saadaan summaamalla:

$$A = \sum A_{f,j} \quad (2.10)$$

$$V = \sum V_{f,j} \quad (2.11)$$

Tarjotun liikenteen keskiarvo ja varianssi voidaan tällä tavoin laskea varsin monimutkaisissakin tapauksissa, mutta miten niiden avulla lasketaan ylivuotoväylän esto? Yleisimmin käytetty menetelmä tämän ongelman ratkaisemiseksi on ERT-menetelmä, jonka periaate on esitetty kuvassa 2.6: kun tunnetaan liikenteen keskiarvo ja varianssi, voidaan rakentaa ylivuotojärjestelmä, jonka ylivuotoliikenteellä on nämä parametrit.

Etsitään A_1 ja S_1 :



siten että A ja V täsmäävät

Kuva 2.6. ERT-menetelmän periaate.

Käytettävissä ovat siis yhtälöt:

$$A = A_1 B_E [A_1, S_1] \quad (2.12)$$

$$V = A \left(1 - A + \frac{A_1}{S_1 + 1 - A_1 + A} \right) \quad (2.13)$$

Näistä täytyy ratkaista A_1 ja S_1 , kun tunnetaan A ja V . Ratkaisu voidaan suorittaa iteratiivisesti. Voidaan myös käyttää likiarvokaavoja ($z=V/A$):

$$A_1 = V + 3z(z - 1)$$

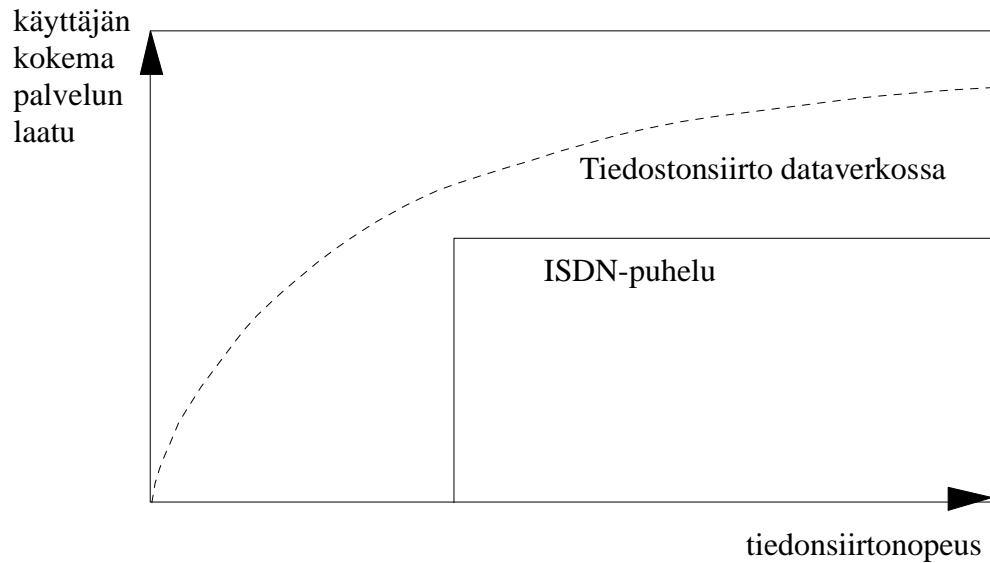
$$S_1 = \frac{A_1(A + z)}{A + z - 1} - A - 1 \quad (2.14)$$

Kun A_1 ja S_1 on määritetty voidaan vaihtoehtoisen väylän esto laskea kaavalla 2.8. Ongelmana on se, että ensisijaisen väylän johtojen määräksi ei yleensä saada kokonaislukua. Erlangin estokaava voidaan kuitenkin esittää gamma-funktion avulla muodossa, jossa johtojen määrä voi olla mikä tahansa reaaliluku.

Vielä on esittämättä eräs hyvin tärkeä kysymys: mitä ERT-menetelmällä laskettu esto kuvaa? Aikaisemmin todettiin, että kyseessä on ylivuotoväylän esto; yleensä ei kuitenkaan olla kiinnostuneita väylän estosta vaan liikenteen estosta. Minkä liikenteen estosta sitten on kysymys. Vastaus on yleensä: ei tarkkaan ottaen minkään vaan kyseessä on mitoituksessa käytettävä suure, joka kuvaa keskimääräistä estoa niille kutsuille jotka tulevat kyseiselle väylälle.

3. TILAAJAN OMINAISUUKSIA

Tässä luvussa pyritään mallintamaan tilaajan käyttäytymistä, silloin kun verkon kapasiteetti ei ole yhteyttä haluttaessa riittävä. Tässä suhteessa perinteinen puhelinverkko ja dataliikenteeseen soveltuvat verkot eroavat oleellisesti toisistaan. Tilannetta valoittaa kuva 3.1, jossa on esitetty asiakkaan saama hyöty saatavilla olevan kapasiteetin funktiona. 64 kbit/s -nopeuteen perustuvassa digitaalisessa puhelinverkossa tilanne on hyvin yksinkertainen: jos tarvittavaa kapasiteettia ei ole saatavissa, yhteydellä ei ole mitään arvoa ja toisaalta kapasiteetin lisäys yli raja-arvon ei anna mitään lisäarvoa.



Kuva 3.1. Käyttäjän kokema palvelun laatu eri tyyppisillä palveluilla erilaisissa verkoissa.

Tämä ei kuitenkaan ole aivan koko totuus edes puhelinverkossa maailmanlaajuisesti, nimittäin ainakin satelliittiyhteyksillä ja valtamerikaapeleissa puheluja pakataan tiukempaan mm. hyödyntämällä puheeseen luontaisesti syntyviä taukoja. Asiakkaan kokema palvelun taso laskee tällöin jonkin verran mutta ei dramaattisesti. Tämä ei tietenkään ole sallittua, jos käyttäjä nimenomaan haluaa 64 kbit/s digitaalisen yhteyden eikä puheyhteyttä. Eli periaatteena on, että asiakkaan salliessa operaattori voi kuormituksen ollessa korkea huonontaa hieman käynnissä olevien palvelujen laatua, jotta vastaavasti yhteyksiä mahtuu enemmän (ja hinta/yhteys saadaan halvemmaksi). Puhelinverkossa tämä on kuitenkin sen verran hankalaa että sitä ei kannata käyttää kuin poikkeustapauksissa. Käytännössä tilanne on siis se, että on olemassa tietty yhteyksien määrä jota ei voida ylittää, ja jos asiakkaat haluavat enemmän yhteyksiä, niin osa yhteyksistä hylätään tai, tilanteen niin salliessa, asiakas siirtyy jonoon.

Sekä jonotuksessa että estyneiden kutsujen uusiutumisessa asiakkaan tavoitteena kokemansa palvelun taso mahdollisimman hyväksi eli esto mahdollisimman pieneksi. Millä estolla palvelun tasoa sitten mitataan: järjestelmässä, jossa on rajoitettu määrä odotuspaikkoja voidaan laskea aika-, kutsu-, liikenne- ja odotusesto. Uusiutuneiden kutsujen tapauksessa voidaan laskea aika-, liikenne-estot sekä kutsuesto sekä ensimmäisille yrityksille että uusiutuneille kutsuille. Estojen lisäksi voidaan laskea keskimääräisiä odotusaikoja ja uusiutuneiden kutsujen määriä. Miten erilaisia suureita painotetaan. Vihjeitä tähän antaa tilaajien käyttäytyminen: voidaan ajatella, että tilaajat optimoivat jossain määrin käyttäytymistään jonossa ja uusiessaan kutsujaan.

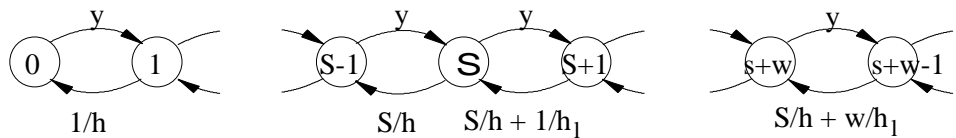
Samoin tilanteissa, joissa palvelujärjestelmä tekee päätöksiä, esimerkiksi otetaanko asiakas odottamaan vai, voidaan yrittää etsiä optimaalista kohtaa. Eri asiakkaat painot-

tavat eri asioita eri tavalla, joten lopullinen päätös tulisi jättää mahdollisuuksien rajoissa, asiakkaalle itselleen.

Pakettiverkoissa tilanne on oleellisesti erilainen, koska yhteyksille ei varata mitään kiinteitä nopeuksia vaan verkko jakaa tiedonsiirtokapasiteettia jonkin periaatteen mukaisesti.

Jonotus tilaajan kannalta

Tarkastellaan M/M/S/N-järjestelmää, jossa asiakkaalla on mahdollisuus luopua odotuksesta. Oletetaan, että luopuminen tapahtuu eksponentiaalisen ajan jälkeen (tämä tuskin vastaa todellista tilannetta, näin kuitenkin saadaan helposti ratkaistavissa oleva malli). Järjestelmän tila voidaan määrittellä yhdellä parametrillä p = järjestelmässä olevien asiakkaiden määrä. Käytetään seuraavia käsitteitä: jonottavat = jonotusjärjestelmässä olevat asiakkaat = palveltavat + odottavat asiakkaat, $p = s + w$. Tasapainotilan kaavio on siten kuvan 3.2 mukainen.



Kuva 3.2. Jonotusjärjestelmän tasapainotilan kaavio.

Kuvasta 3.2 havaitaan välittömästi, että tasapainotila voidaan ratkaista rekursiivisesti:

$$Pr[p] = \begin{cases} yh Pr[p-1]/p & p = 1, 2, \dots, S \\ \frac{y Pr[p-1]}{S/h + (p-S)/h_1} & p = S+1, \dots, S+N \end{cases} \quad (3.1)$$

jossa N = odotuspaikkojen lukumäärä. $Pr[0]$ saadaan merkitsemällä todennäköisyyksien summa ykköseksi.

Tällaisessa tapauksessa voidaan esto määrittellä monella tavoin: aika- ja liikenne-esto ovat selviä tapauksia. Jos kyseessä on Poisson-liikenne, ovat myös kutsu- ja odotusestot selviä, mutta entä muun tyyppisillä liikenteillä. Tällöin on määriteltävä mitä odotusestolla täsmällisesti tarkoitetaan. Asiakkaan kannalta parhaiten tilannetta kuvanee odotusesto, joka lasketaan keskimääräisistä kutsuintensiteeteistä eli odotusesto on odottamaan joutuvien kutsujen suhde tuleviin kutsuihin.

Asiakkaan kannalta luopumisella ja odotuspaikkojen äärellisellä määrällä on tavallaan sama merkitys: vältetään turhan pitkät odotusajat. Voidaan esimerkiksi ajatella puhelin-

liikenteen kannalta tyypillistä tilannetta: puhelinvaihteen välittäjälle jonottavat puhelut. Puhelimen käyttäjän kannalta odotusaika on tällöin hukka-aikaa ja mikäli jono on riittävän pitkä, luopuu asiakas joka tapauksessa yrityksestään. Jonotuspaikkojen määrällä on siten tietty optimi, joka voidaan arvioida keskimääräisen odotusajan perusteella.

Jonotusjärjestelmää ja siihen tulevia asiakkaita voidaan mallittaa monella tavalla. Edellä tarkastellussa mallissa on ehkäpä heikoin kohta oletus, että asiakkaiden luopumisajat ovat eksponentiaalisesti jakautuneita. Muut jakautumat ovat kuitenkin mallittamisen kannalta huomattavasti vaikeampia, eikä niitä tässä käsitellä.

Toinen varsin helposti ratkaistava tapaus on, kun asiakkaat jäävät jonottamaan todennäköisyydellä, joka voi riippua kulloisestakin jonon pituudesta. Tällöin on siis oletettava, että asiakas tietää jonon pituuden esimerkiksi jonotusjärjestelmän ilmoittaessa odotettavissa olevan jonotusajan. Tässäkin tapauksessa saadaan tasapainotilan todennäköisyydet varsin helposti (tämä jätetään lukijan tehtäväksi).

Esimerkki

Puhelinvaihteessa on 3 välittäjää. Välittäjille tulee yhteensä keskimäärin 5 kutsua minuutissa, jotka kukin ovat keskimäärin 30 s pitkiä. Lasketaan mikä vaikutus erilaisilla jonotusjärjestelmillä on estoihin ja odotusaikoihin. Erlangin estokaavalla saadaan:

$$B_E = 28,22 \%$$

Kun odotuspaikkoja on ääretön määrä, odotusestoksi saadaan (M/M/S-järjestelmä):

$$B_w = 70,22 \%$$

Tämä on käytännössä ilman muuta on liian suuri; varsinkin kun asiakkaat joutuvat odottamaan palvelua keskimäärin 42 s (taulukko 3.1). On kuitenkin muistettava, että jos asiakkaat eivät luovu kesken odotuksen, liikenne-estoa on nolla. Käytännössä asia ei kuitenkaan ole näin, vaan aikansa odotettuaan asiakkaat häipyvät jonosta. Taulukon kolmannessa sarakkeessa on esitetty, minkälainen vaikutus on sillä, että asiakkaat luopuvat keskimäärin 1 min odotuksen jälkeen (odotusaika on myös eksponentiaalisesti jakautunut). Huomataan, että jonon pituus ja siten myös odotusajat lyhenivät huomattavasti. Toisaalta menetettyjen asiakkaiden määrä kasvoi yli kolmeentoista prosenttiin.

Jos jonon pituus rajoitetaan kolmeen, saadaan lähes samat keskimääräiset odotusajat kuin asiakkaiden luopuessa intensiteetillä 1/min. Taulukon viimeisistä sarakkeista havaitaan, että esitetyillä liikenteen parametreilla ei järjestelmään kannata laittaa kuin 3...5 odotuspaikkaa. Näin vältetään turhilta odottamisilta mutta ei kuitenkaan menetä asiakkaita odotuspaikkojen vähyden vuoksi.

Taulukko 3.1. Jonotusjärjestelmän palvelun tasoa kuvaavat parametrit.

	$h_1 = \infty$		$h_1 = 60 \text{ s}$		
	$N = \infty$	$N = 3$	$N = \infty$	$N = 5$	$N = 3$
$B_w \%$	70,22	54,98	50,79	50,44	48,63
$B_a \%$	0	10,24	13,05	13,29	14,50
$E[w]$	3,51	0,70	0,65	0,61	0,47
h_w	42,0	8,4	7,8	7,3	5,7
$h_w b$	59,9	15,3	15,4	14,5	11,7

Kutsujen uusiutuminen

Tähänastisissa tarkasteluissa liikennelähteet ovat olleet ideaalisia: on oletettu, että kutsun estyessä se menetetään lopullisesti eikä asiakas yritä uudelleen. Näin ei tietenkään käytännössä ole vaan estynyt asiakas reagoi aina jollain tavoin: asiakas pyrkii saamaan haluamansa palvelun ennenmin tai myöhemmin (tai mahdollisesti jotain muuta kautta). Välitetty liikenne pyrkii siten kasvamaan aina mahdollisimman lähelle tarjottua liikennettä; ainakin mikäli tarkastellaan riittävän pitkää aikaväliä sekä asiakkaan kannalta vaihtoehtoisia palvelujärjestelmiä.

Pyritään jälleen rakentamaan ilmiötä kuvaava malli, jonka avulla voidaan tarkastella estyneiden kutsujen vaikutusta liikenteeseen. Mallissa tehdään seuraavat oletukset:

1. Alkuperäiset kutsut tulevat Poisson-prosessin mukaisesti,
2. estyneet kutsut siirtyvät uusiutumista odottavien joukkoon,
3. odottavat asiakkaat yrittävät uudelleen eksponentiaalisin väliajoin,
4. luopuvat uusista yrityksistä eksponentiaalisesti jakautuneen ajan jälkeen ja
5. palveluajat ovat jakautuneet eksponentiaalisesti.

Näillä oletuksilla liikenteen tila voidaan kuvata kahdella parametrillä: palveltavana olevat $[p]$ sekä uusiutumista odottavat kutsut $[r]$. Liikenteen ominaisuuksien määrittämiseen tarvitaan parametrit:

y = alkuperäisten kutsujen intensiteetti

h = palveluajan pituus

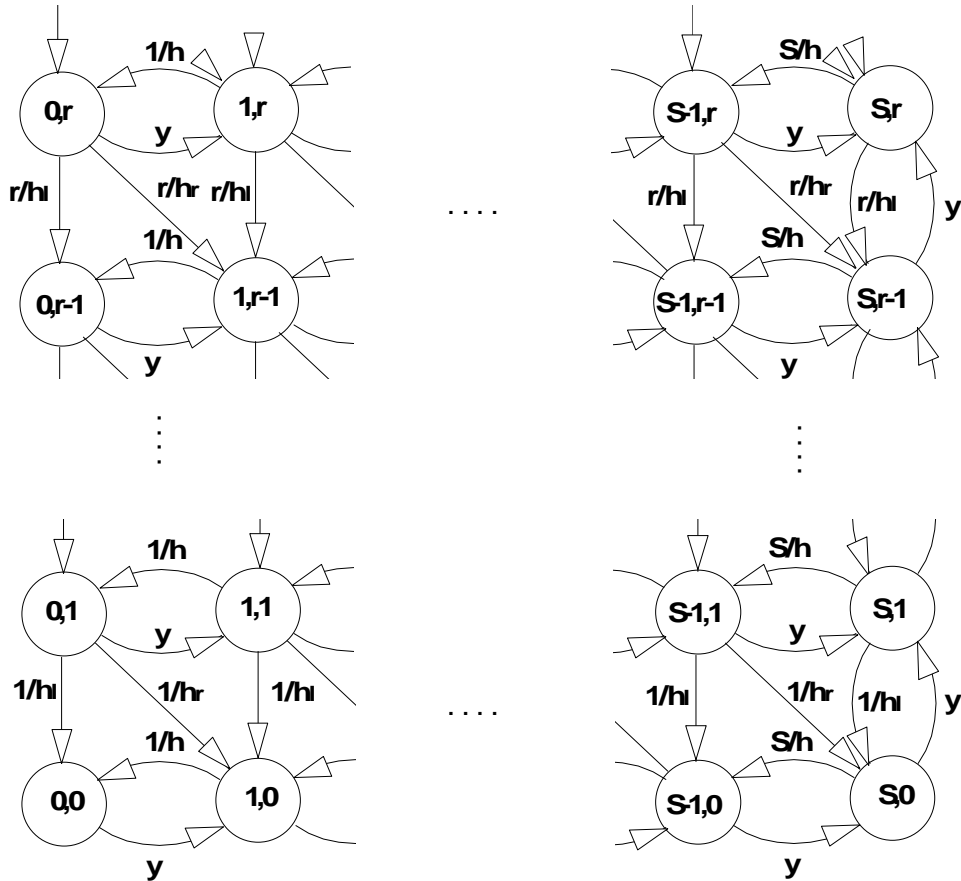
h_r = keskimääräinen uusintayritysten välinen aika (yhdeällä asiakkaalla)

h_l = keskimääräinen aika, jonka jälkeen asiakas luopuu uusintayrityksistään

Näiden tietojen pohjalta voidaan laatia tasapainotilan kaavio, joka on esitetty kuvassa 3.2. Tasapainotilan kaavio voidaan ratkaista numeerisesti, laskenta-aika voi kuitenkin olla varsin pitkä.

Kun tasapainotila tunnetaan, voidaan ratkaista myös aika-, kutsu- ja liikenne-esto. Mikä on näiden estojen tulkinta tässä mallissa? Koska alkuperäiset kutsut tulevat Poisson-prosessin mukaisesti, niiden kokema esto on sama kuin aikaesto. Kutsuesto on kaikkien tulevien kutsujen (alkuperäisten ja uusiutuvien) keskimääräinen todennäköisyys estyä. Liikenne-esto kertoo kuinka suuri osa alkuperäisistä kutsuista luopuu lopullisesti.

Lisäksi voidaan määrittellä uusiutuvien kutsujen esto B_r , joka ilmaisee kuinka suuri osa uusiutuvista kutsuista estyy. Tämä esto voi olla hyvinkin suuri, jos estyneet kutsut uusiutuvat nopeasti, jolloin ne kohtaavat uudelleen saman estotilanteen.



Kuva 3.3. Uusiutuvien kutsujen tasapainotilan kaavio.

Esimerkki

Olkoon tarjotun liikenteen parametrit: $y = 5$, $h = 1$, $A = 5$, $h_r = 2$ ja $h_l = 10$. Edellä esitetyllä mallilla saatavat estoarvot on esitetty taulukossa 3.2. Voidaan päätellä, että tälle mallille pätee yleisestikin:

$$B_a < B_t < B_C < B_r$$

Kun h_r lähestyy nollaa, uusiutuvien kutsujen esto kasvaa kohti ykköstä. Rajatapauksena saadaan jonojärjestelmä, jossa asiakkaat luopuvat

odottamisesta eksponentiaalisesti jakautuneen ajan (h_l) jälkeen. Kun h_l kasvaa rajattomasti, saadaan M/M/S jonojärjestelmä.

Taulukko 3.2. Uusiutuvien kutsujen vaikutus estoihin.

	S = 7	S = 8	S = 10
Aikaesto B_t	18,09	9,60	2,16
Liikenne-esto B_a	4,47	2,03	0,41
Kutsuesto B_c	20,04	10,85	2,38
Uusiut. kuts. esto B_r	32,00	23,46	13,64

Tarjotun liikenteen laskeminen

Tarkastellaan tilannetta, jossa on mitattu välitetty liikenne sekä kutsuesto ja näistä pyritään laskemaan tarjottu liikenne. Tarjottu liikenne voidaan arvioida kaavalla (menetelmä on esitetty ITU-T:n suosituksessa E.501):

$$A_0 = \frac{A_c(1 - WB_c)}{1 - B_c} \quad (3.2)$$

jossa parametrilla W otetaan huomioon uusiutuneiden kutsujen vaikutus. W vastaa lähinnä sitä todennäköisyyttä, että estynyt kutsu yrittää uudelleen epäonnistuneen kutsu-yrityksen jälkeen. Edellä esitetyssä mallissa, jossa h_r ja h_l ovat eksponentiaalisesti jakautuneita, pätee (todistaminen jätetään lukijalle):

$$W = \frac{h_l}{h_l + h_r}$$

Tarkastellaan vielä lyhyesti aikaisemmin esitettyä esimerkkitapausta edellä esitetyn menetelmän valossa. Esimerkissä saatiin seuraavat arvot kun $S = 8$:

$$B_c = 10,85 \%$$

$$A_c = 4,90 \text{ Erl}$$

$$W = 5/6$$

Joten tarjotun liikenteen arvoksi saadaan:

$$\begin{aligned} A_0 &= 4,90 * (1 - 0,1085 * 5/6) / (1 - 0,1085) \\ &= 5,00 \end{aligned}$$

Käytännössä kutsujen uusiutumisosprosessi on hyvinkin monimutkainen ja vaikeasti mallitettavissa. Esitetyllä tavalla saadaan kuitenkin kohtuullinen arvio uusiutuvien

kutsujen vaikutuksesta liikenneprosessiin, vaikka kaava (3.2) ei olekaan yleisessä tapauksessa tarkka.

4. LIIKENTEEN HITAAIT VAIHTELUT

Tähän asti on oletettu, että liikenteen intensiteetti ei riipu ajasta. Tämä oletus pätee yleensä vain lyhyellä tarkastelujaksolla, sensijaan jos liikennettä tarkastellaan pitkällä aikajaksolla myös liikenteen intensiteetti vaihtelee. Vaihtelut voivat olla joko hitaita tai nopeita (vertailukohtana voidaan käyttää keskimääräistä palveluaikaa).

Hitaita vaihteluita on huomattavasti helpompi käsitellä, koska eri ajankohtien liikenteen arvojen voidaan olettaa tällöin olevan toisistaan riippumattomia. Liikenteen ominaisuuksia ja siten myös estoja ja muita liikenteen parametrejä voidaan tarkastella jokaisella liikenteen intensiteetin arvolla erikseen.

Vastaavasti kuin liikenteen muutoksia voidaan tarkastella myös järjestelmän muutoksia. Järjestelmän ominaisuudethan voivat muuttua esimerkiksi vikaantumisen vuoksi. Koska vikaantumiseen liittyvät ajat ovat yleensä varsin pitkiä, voidaan niitä käsitellä samoilla menetelmillä kuin hitaita intensiteetin vaihteluita.

Liikenteen jakauman laskeminen

Pyrittäessä mitoittamaan esim. puhelinverkkoa liikennemittaukset suoritetaan yleensä kymmenenä peräkkäisenä työpäivänä. Näistä lasketaan ajan suhteen keskiarvo, etsitään päivän kiireisin tunti ja suoritetaan mitoitus tämän keskimääräisen kiiretunnin liikenteen perusteella. Tarkastellaan miten liikenteen intensiteetin vaihtelut tulisi ottaa huomioon mitoituksessa. Oletetaan ensiksikin, että liikennettä voidaan kuvata samalla mallilla eri päivinä siten, että vain liikenteen intensiteetti vaihtelee eri päivinä (tämä oletus ei kylläkään ole välttämätön). Merkitään aikajakson j (esim. tietyn päivän kiiretunnin) tarjotun liikenteen keskiarvoa A_j :llä ($j = 1, 2, \dots$) sekä aikajakson j osuutta kokonaisajasta $\Pr[A_j]$:llä. Voidaan myös ajatella että liikenteen intensiteetti on A_j todennäköisyydellä $\Pr[A_j]$.

Kunkin aikajakson liikenteiden jakaumat voidaan laskea erikseen sopivaksi katsotun mallin avulla. Merkitään näin saatuja tilatodennäköisyyksiä aikajaksona j :

$$\Pr_{o,j}[p] = \text{tarjotun liikenteen jakauma}$$

$$\Pr_{c,j}[p] = \text{välitetyn liikenteen jakauma}$$

Tarkastellaan kaavojen johtamisen rinnalla yksinkertaista esimerkkiä. Liikenne muodostuu siinä kahdesta Poisson-jakaumasta, joiden keskiarvot ja todennäköisyydet ovat:

$$A_1 = 5 \quad \Pr[A_1] = 0,5$$

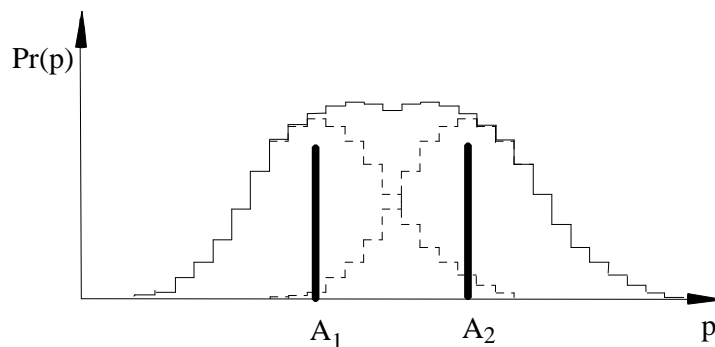
$$A_2 = 15 \quad \Pr[A_2] = 0,5$$

Ehkäpä selvin esitystapa on käsitellä asioita liikenteen mittaamisen kannalta. Koska liikennemittauksissa lasketaan eri aikajaksojen keskiarvoja, myös tilatodennäköisyydet saadaan laskemalla keskiarvot:

$$\Pr_o[p] = \sum (\Pr[A_j] \Pr_{o,j}[p]) \quad (4.1)$$

$$\Pr_c[p] = \sum (\Pr[A_j] \Pr_{c,j}[p]) \quad (4.2)$$

Kuvassa 4.1 on esitetty keskiarvojen jakauma ja tarjotun liikenteen jakauma esimerkki-tapauksessa.



Kuva 4.1. Liikenteen jakauman muodostuminen kahdesta osasta.

Tarjotun liikenteen keskiarvo saadaan myös keskiarvona:

$$A = \sum (\Pr[A_j] A_j) \quad (4.3)$$

Esimerkin tapauksessa:

$$A = 0,5*5 + 0,5*15 = 10$$

Mutta miten on laita liikenteen varianssin; yhdistettäessä riippumattomia liikennevirtoja voitiin laskea yhteen myös varianssit. Tässä summataan kuitenkin painokertoimien avulla jakaumia, jolloin nollamomentit summautuvat:

$$E[p] = \sum (\Pr[A_j] E_j[p]) \quad (4.4)$$

$$E[p^2] = \sum (\Pr[A_j] E_j[p^2]) \quad (4.5)$$

Näistä kaavoista saadaan laskettua myös liikenteen varianssi:

$$V = E[p^2] - E[p]^2 \quad (4.6)$$

Kaavoista on varsin vaikea nähdä miten varianssi käyttäytyy. Jatketaan tarkastelua käyttäen hyväksi sitä oletusta, että vain liikenteen keskiarvo vaihtelee. Tällöin voidaan ajatella, riippuen käytetystä liikenteen mallista, että tarjotun liikenteen huippukerroin tietyn aikajakson aikana (z_x) pysyy vakiona:

$$z_x = V_j/A_j \quad ; \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

Jolloin:

$$V_j = z_x A_j = E_j[p^2] - (E_j[p])^2$$

josta saadaan

$$E_j[p^2] = A_j^2 + z_x A_j \quad (4.8)$$

Liikenteen keskiarvot muodostavat jakauman, jolle voidaan laskea huippukerroin:

$$z_t = (\sum(\text{Pr}[A_j]A_j^2) - A^2)/A \quad (4.9)$$

Josta seuraa että:

$$\sum(\text{Pr}[A_j]A_j^2) = z_t A + A^2 \quad (4.10)$$

Joten:

$$E[p^2] = \sum(\text{Pr}[A_j]A_j^2) + \sum(\text{Pr}[A_j]A_j)z_x \quad (4.11)$$

$$= z_t A + A^2 + z_x A \quad (4.12)$$

$$z = (E[p^2] - A^2)/A \quad (4.13)$$

$$z = z_x + z_t \quad (4.14)$$

Esimerkissä $z_x = 1$ koska kyseessä on Poisson-liikenne ja $z_t = (0,5*5^2 + 0,5*15^2 - 10^2)/10 = 2,5$. Joten $z = 1 + 2,5 = 3,5$. Huomattakoon että tämä huippukerroin (tai sitä vastaava varianssi) on se tulos joka saadaan mittaamalla liikennettä.

Suurilla liikenteen arvoilla voi intensiteettijakauman vaikutus koko liikenteen jakaumaan olla huomattava. Nimittäin jos merkitään liikenteen intensiteetin hajonnan suhdetta keskiarvoon c_t :llä (esimerkkitapauksessa $c_t = 0,5$), saadaan:

$$z = z_x + c_t^2 A \quad (4.15)$$

Esimerkkitapauksessa saadaan:

$$z = 1 + A/4$$

Eli suurilla liikenteen arvoilla huippukerroin voi olla hyvinkin suuri jos ajasta riippuvat vaihtelut ovat aina samassa suhteessa liikenteen keskiarvoon. Tämä taas on yhtäpitävää sen kanssa, että liikenteen osaprosessien aikariippuvuudet ovat samanlaisia (synkronoituja). Käytännössä ei tilanne ole ehkä aivan näin hankala, mutta siitä huolimatta on yleensä perusteltua olettaa aikariippuvuudet ovat pikemminkin positiivisesti kuin negatiivisesti korreloituneita. Tämä näkyy myös käytännön liikennemittausten tuloksissa siten että mitattu huippukerroin on sitä suurempi mitä suurempi on liikenteen keskiarvo.

Estojen laskeminen

Entä mikä vaikutus tällä ilmiöllä on estoihin? Lähdetään jälleen estojen määritelmistä. Aikaesto on todennäköisyys, että satunnaisella hetkellä tuleva asiakas estyy. Tässä tapauksessa aikaesto saadaan eri aikajaksojen aikaestojen painotettuna keskiarvona:

$$B_t = \sum(\text{Pr}[A_j] B_t[A_j]) \quad (4.16)$$

Vastaavasti kutsu- ja liikenne-estoilta saadaan lausekkeet:

$$B_c = \sum(\text{Pr}[A_j] Y_{b,j}) / \sum(\text{Pr}[A_j] Y_{in,j}) \quad (4.17)$$

$$B_a = \sum(\text{Pr}[A_j] A_j B_a[A_j]) / E[A] \quad (4.18)$$

Esimerkki 4.1.

Tarkastellaan tilannetta, jossa on mitattu usealta päivältä kiiretuntiliikenteen keskimääräinen jakauma ja saatu arvot:

$$A = 10 \text{ ja } z = 1$$

Oletetaan, että liikenteen mittaja ei ole huomannut eritellä millään tavoin eri päivien liikennettä. Järjestelmä tulisi kuitenkin mitoittaa tämän mittauksen perusteella, siten että sallittu esto on 2%. Mitattu jakauma on voinut muodostua monella tavoin, voidaan kuitenkin erottaa kaksi toisistaan selvästi eroavaa tapausta:

- jakauma on muodostunut yhdistämällä samanaikaisesti erilaisia liikennevirtoja
- jakauma on muodostunut eri ajankohtina valinneiden liikenteiden jakaumien summana

Liikenteen luonteesta on siten tehtävä jonkinlainen oletus eli miten z_x :n ja z_t :n osuudet jakautuvat kaavassa:

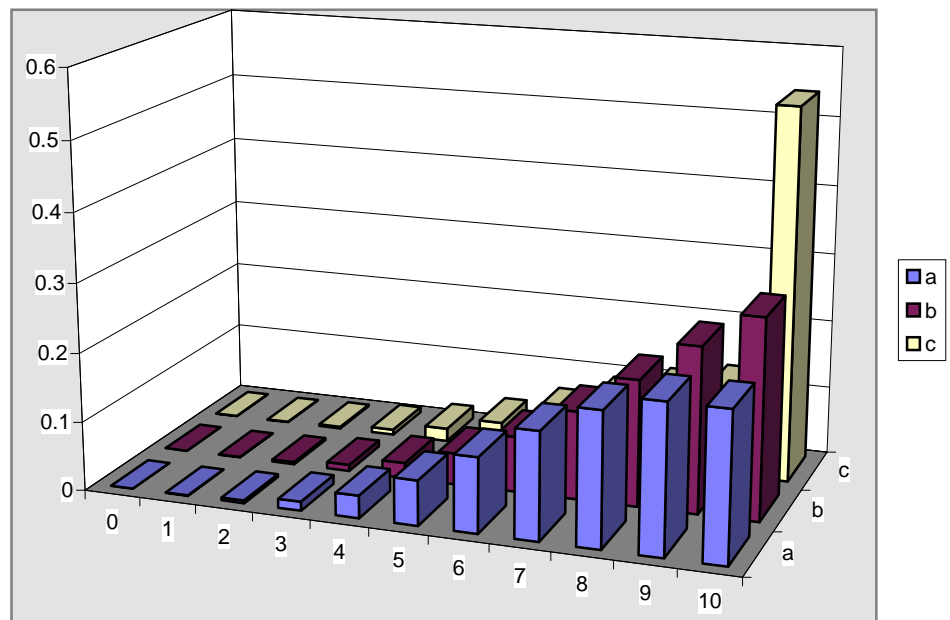
$$z = z_x + z_t$$

Tarkastellaan kolmea eri mahdollisuutta:

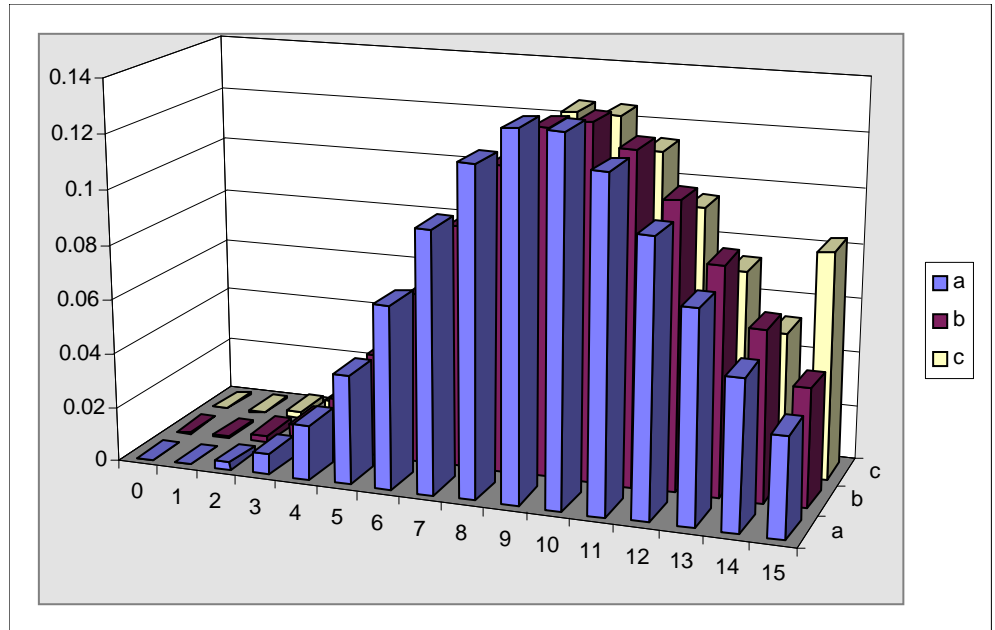
- a) $z_x = 1, z_t = 0$
- b) $z_x = z_t = 0,5$
- c) $z_x = 0, z_t = 1$

Tapauksessa *a* on kyseessä Poisson-liikenne, siten että jokaisena päivänä liikenteen intensiteetti on sama. Mallissa *c* liikenteen vaihtelu johtuu pelkästään intensiteetin vaihteluista (käytännössä varsin epätodennäköinen tilanne). Oletetaan lisäksi, että myös tässä tapauksessa liikenne on Poisson-jakautunut. Tapauksessa *b* hitaiden ja nopeiden vaihteluiden osuudet ovat yhtä suuria. Oletetaan lisäksi molempien jakaumien olevan binomiaalisia, jolloin koko liikenteen jakauma on lähes sama kuin tapauksissa *a* ja *c*.

Kuvissa 4.2 ja 4.3 on esitetty välitetyn liikenteen jakauma, kun palvelupaikkoja on 10 ja 15. Kuvista voidaan havaita se seikka, että Poisson-liikenteen tapauksessa (tapaus *a*) esto ei vaikuta välitetyn liikenteen jakauman muotoon. Sen sijaan tapauksissa *b* ja *c* estynyt liikenne "kasautuu" suurille *p*:n arvoille. Aikaesto on tällöin suurempi ja liikenne-esto pienempi kuin Poisson-liikenteellä. Mittaamalla koko liikenteen jakauma ei voida siten tarkasti päätellä, miten jakauma on muodostunut ja miten se käyttäytyy (varsinkaan jos esto on hyvin pieni, jos taas esto on suuri, todelliseen tilanteeseen vaikuttaa myös estyneiden kutsujen uusiutuminen).



Kuva 4.2. Liikenteen jakauma eri liikennetyypeillä,
 $A = 10, z = 1, S = 10$.



Kuva 4.3. Liikenteen jakauma eri liikennetyypeillä,
 $A = 10, z = 1, S = 15$.

Sallituksi estoksi oli määritelty 2 %. Taulukosta 4.1 nähdään, että käytettäessä mitoituserusteena aikaestoa tarvittavien johtojen määrä eri liikenteen tyypeillä on 17 tai 18. Liikenne-estolla vastaavat johtomäärät ovat 14, 16 tai 17. Järjestelmiä mitoitettaessa on siten tunnettava liikenteen keskiarvon ja varianssin lisäksi liikenteen tyyppi ainakin jollain tarkkuudella. Erityisesti tämä voi olla olleellista hyvin suurilla väylillä, joissa tarjotun liikenteen oletaminen Poisson-prosessin mukaiseksi voi aiheuttaa oleellisesti virheellisen tuloksen.

Taulukko 4.1. Aika- ja liikenne-estot eri liikennetyypeillä.

S	liikenne a	liikenne b		liikenne c	
	$B_t = B_a$	B_t	B_a	B_t	B_a
10	21,46	28,82	17,70	54,21	12,51
11	16,32	21,71	12,82	41,70	8,34
12	11,97	15,62	8,91	30,32	5,31
13	8,43	10,71	5,91	20,84	3,22
14	5,68	6,97	3,73	13,55	1,87
15	3,65	4,30	2,24	8,35	1,03
16	2,23	2,50	1,27	4,87	0,55
17	1,29	1,37	0,68	2,70	0,28
18	0,71	0,71	0,34	1,43	0,13
19	0,37	0,35	0,16	0,72	0,06
20	0,19	0,16	0,07	0,35	0,03

5. LIIKENTEEN MITTAAMINEN

Tavoitteet

Telejärjestelmien mitoituksessa tarvitaan tietoja liikenteen arvoista: kuinka paljon tulee kutsuja ja kuinka pitkiä kutsut ovat. Näitä tietoja saadaan liikennemittauksilla. Tyypillisesti liikennemittauksilla pyritään selvittämään kiiretuntiliikenteen keskiarvo. Keskimääräinen kiiretunti määritellään seuraavasti:

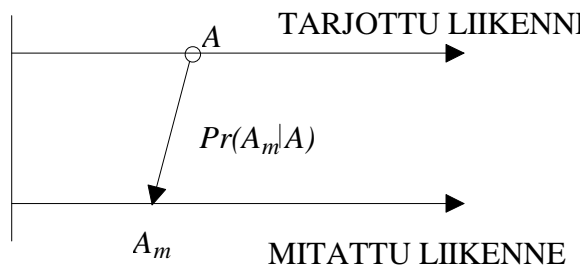
Kymmenen peräkkäisen normaalityöpäivän liikenteen keskimääräinen voimakkuus mitataan neljännestunnin jaksoissa ja eri päivien vastaavien neljännestuntien arvot lasketaan yhteen. Keskimääräisen kiiretunnin muodostavat ne neljä peräkkäistä neljännestuntia, joiden havaintojen summa on suurin. Näiden päivää kohti laskettu keskiarvo antaa kiiretunnin liikenteen voimakkuuden.

Mitoitus suoritetaan näin mitatun kiiretuntiliikenteen perusteella, yleensä käyttäen mitoitusaulukkoa ja olettaen, että mitattu liikenne on todellinen tarjottu liikenne. Näin siis käytännössä, mutta miten tarkasti tällainen mittaustulos kuvaa todellista liikennettä.

Mittaustuloksen tarkkuus mallissa

Pyritään arvioimaan mittaustuloksen tarkkuus: kun on suoritettu mittaus, missä rajoissa tarjotun liikenteen odotusarvo on. Ongelmaa on kuitenkin helpompi lähteä tarkastelemaan toisin päin: oletetaan jokin liikenteen malli, josta lasketaan erilaisten mittaustulosten todennäköisyydet.

Asiaa on havainnollistettu kuvassa 5.1. Olkoon tarjotun liikenteen odotusarvo A määrättyllä liikenteen mallilla. Mallin avulla voidaan laskea todennäköisyys, että mitattaessa liikennettä tietty aika (T) saadaan mittaustulokseksi A_m . Merkitään tätä ehdollista todennäköisyyttä $\Pr[A_m|A]$.



Kuva 5.1. Liikenteen mittauksen suhde matemaattiseen malliin

Jotta todennäköisyys $\Pr[A_m|A]$ voitaisiin arvioida, on pyrittävä laskemaan

$$E[A_m|A] = \text{mittaustuloksen odotusarvo ja}$$

$$V[A_m|A] = \text{mittaustuloksen varianssi.}$$

Odotusarvo on selvä: käytetään liikenneteorian kaavoja välitetyle liikenteelle ja jos estoa ei ole, on mittaustuloksen odotusarvo sama kuin välitetyn liikenteen odotusarvo. Mittaustuloksen varianssin laskeminen on jo huomattavasti vaikeampaa. Jos liikenteestä otetaan yksi näyte, voidaan varianssi toki laskea samalla tavoin kuin keskiarvokin välitetyn liikenteen kaavojen avulla. Edelleen jos liikenteestä otetaan useita riippumattomia näytteitä voidaan varianssi laskea. Riippumattomien satunnaismuuttujien summaa laskettaessa varianssit voidaan laskea yhteen, jolloin mitatun keskiarvon varianssi on arvioitavissa kohtuullisen tarkasti seuraavalla kaavalla:

$$V[A_m|A] = V_c/N_m \quad (5.1)$$

jossa: V_c = välitetyn liikenteen varianssi ja N_m = näytteiden määrä. Tätä kaavaa voidaan käyttää mittaustuloksen tarkkuuden arviointiin myös siten, että lasketaan näytteiden varianssi. Tämän varianssin voidaan olettaa olevan sama kuin välitetyn liikenteen varianssi V_c , varsinkin jos näytteiden määrä on kohtuullisen suuri (>10). On huomattava, että näytteiden välisen ajan tulee olla selvästi pitempi kuin keskimääräinen palveluaika, jotta riippumattomuusoletus voitaisiin tehdä.

Mittaustarkkuus Poisson-liikenteellä

Jatkuva mittaus

Mitataan Poisson-prosessia T :n pituinen aika ja lasketaan liikenteen keskiarvo tältä ajalta. Tämä mittaustulos on satunnaismuuttuja, joka riippuu liikenteen odotusarvosta A , mittausajasta T sekä palveluajan odotusarvosta h . Mittaustuloksen odotusarvo on tällöin A ja varianssi:

$$V[A_m|A] = \frac{2Ah}{T} \left(1 + \frac{h}{T} (e^{-T/h} - 1) \right) \quad (5.2)$$

Kun mittausaika on huomattavasti keskimääräistä palveluaikaa lyhyempi tai pitempi voidaan käyttää yksinkertaisempia kaavoja:

$$V[A_m|A] = A \quad ; \quad T \ll h \quad (5.3)$$

$$V[A_m|A] = 2Ah/T \quad ; \quad T \gg h \quad (5.4)$$

Näytteenottoperiaatteen vaikutus

Yleensä liikennettä ei mitata jatkuvasti, vaan siitä otetaan näytteitä määrävälein (τ). Mittaustulosten varianssi on tällöin likimäärin (kun $T \gg \tau$):

$$V[A_m|A] = \frac{A\tau(1 + e^{-\tau/h})}{T(1 - e^{-\tau/h})} \quad (5.5)$$

Kun näytteiden välinen aika on lyhyempi kuin keskimääräinen palveluaika, on näytteenoton vaikutus sangen pieni. Kun $\tau=h$ on näytteenoton aiheuttama lisäys varianssiin noin 8% ja kun $\tau=h/10$ lisäys on 0,08%. Kun näytteenottoväli on pitempi kuin keskimääräinen palveluaika, on ratkaisevaa näytteiden määrä, koska näytteet ovat tällöin lähes riippumattomia toisistaan (vertaa kaava 5.1).

Liikenteen mallin vaikutus mittaustarkkuuteen

Käytettävä liikenteen malli vaikuttaa luonnollisesti mittaustarkkuuteen. Täsmällisiä lausekkeita ei yleensä voida johtaa, kohtuullisen tarkkoja approksimaatioita voidaan kuitenkin esittää. Tarkastellaan lyhyesti seuraavia liikenteen ominaisuuksien vaikutusta mittaukseen: tarjotun liikenteen varianssi, palveluajan jakauma, liikenteen keskiarvon vaihtelut ja esto.

Liikenteen varianssi

Mikä on mittaustarkkuus esimerkiksi binomiliikenteellä? Tällaisessa tapauksessa tuntuu varsin luonnolliselta ajatella, että mittaustarkkuuden varianssi on verrannollinen liikenteen varianssiin (vertaa kaava 5.1). Näin voidaan päätellä, että mittaustuloksen varianssi on likimäärin:

$$V[A_m|A, z] = zV[A_m|A, z=1] \quad (5.6)$$

jossa $V[A_m|A, z=1]$ voidaan laskea Poisson-liikenteen kaavoilla (5.2- 5.5).

Palveluajan jakauma

Entä onko palveluajan jakaumalla merkitystä mittaustarkkuuteen? Edellä esitetyissä kaavoissa on oletettu, että palveluajat ovat eksponentiaalisesti jakautuneita. Mutta millainen on mittaus, jos kaikkien asiakkaiden palveluajat ovat yhtä pitkiä (h). Tällaisessa tapauksessa mittaus voitaisiin hyvin suorittaa h :n pituisin välein: mittaustulos kertoo tällöin palveluajan pituisena aikana tulleiden asiakkaiden määrän ja kun määrä tunnetaan, tunnetaan myös liikenne, koska h on vakio.

Eli toisella tavalla ilmaistuna: liikenteestä voidaan ottaa toisistaan riippumattomia näytteitä h :n pituisin välein. Mittaustarkkuudeksi saadaan tällöin kaavan 5.1 mukaisesti:

$$V[A_m|A] = Ah/T \quad (5.7)$$

Joka on siis puolet kaavalla 5.4 saatavasta lausekkeesta. Yleisemmässä muodossa palveluajan vaikutus mittaustarkkuuteen saadaan kaavalla:

$$V[A_m|A] = (1 + c_h^2) Ah/T \quad (5.8)$$

jossa c_h on palveluajan hajontakerroin eli keskihajonnan ja keskiarvon suhde; eksponentiaali-jakaumalla $c_h = 1$.

Liikenteen keskiarvon vaihtelut

Palautetaan mieleen mitä olemme laskemassa; mikä on mittaustulos, jota olemme tarkastelemassa. Ensiksikin mittaamme kiiretuntien liikennettä, jolloin mittaustarkkuutta voidaan arvioida edellä esitetyillä kaavoilla. Toiseksi mittaamme prosessia, jossa muuttujana on eri päivien kiiretuntien liikenne. Emmekä voi olla millään muotoa varmoja siitä, että eri päivinä tarjottaisiin täsmälleen samaa liikennettä, samalla liikenteen odotusarvolla. Kyseessä on sama ilmiö, liikenteen odotusarvon vaihtelu, jota tarkasteltiin estoja laskettaessa.

Oletetaan nyt, että kiiretunnin liikenteen odotusarvo on myös satunnaismuuttuja (säännöllisellä esimerkiksi viikonpäivästä johtuvalla vaihtelulla ei mittaustarkkuuden kannalta ole merkitystä). Tämä satunnaisuus voi johtua esimerkiksi siitä, että osa työntekijöistä on satunnaisesti työpaikalla tai jokin merkittävä tapahtuma generoi tiettyinä päivinä normaalia enemmän liikennettä.

Olkoon liikenteen keskimääräinen odotusarvo A , keskimääräinen palveluaika h ja huippukerroin lyhyenä aikana (tyypillisesti kiiretunnin aikana) z_x sekä mittausaika päivää kohti T_d . Mittaustuloksen varianssi on tällöin yhdellä mittausjaksolla (varianssi, jos voisimme mitata samaa päivää loputtomasti, ja kun kyseessä Poisson-liikenne):

$$V_x[A_m|A] = 2z_x Ah/T_d \quad (5.9)$$

Tämän lisäksi oletetaan liikenteen odotusarvon vaihtelevan eri päivinä; merkitään tämän vaihtelun varianssia V_t :llä. Tällöin saadaan yhden päivän mittaustuloksen varianssiksi (nyt mittaamme loputtomasti erilaisia päiviä):

$$V_d[A_m|A] = V_t + V_x[A_m|A] \quad (5.10)$$

Jos oletetaan, että peräkkäisten päivien liikenteet eivät riipu toisistaan (tämä on usein kyseenalainen oletus), saadaan N_d päivää kestävä mittausten tuloksen varianssiksi:

$$V_{N_d}[A_m|A] = V_d[A_m|A]/N_d \quad (5.11)$$

Suurin ongelma tämän kaavan käytössä on varianssi V_t . Jos jokaisen päivän liikenne on mitattu erikseen, voidaan mittaustulosta käyttää apuna. Olkoon mitattu varianssi V_m , joka siis pitäisi olla sama kuin $V_d[A_m|A]$, kun mittauspäiviä on riittävästi. Kaavan (5.10) mukaan saadaan V_t :lle estimaatti, kun V_m on tunnettu:

$$V_t = \max\{V_m - 2z_x Ah/T_d, 0\} \quad (5.12)$$

Tämä kaava sisältää lukuisan määrän oletuksia apriori-todennäköisyyksistä sekä mm. oletuksen, että eri päivien kiiretunnit ovat toisistaan riippumattomia. Kaava antaa kuitenkin paremman kuvan mittaustulosten tarkkuudesta kuin, jos hitaita odotusarvon vaihteluita ei otettaisi huomioon ollenkaan.

Eston vaikutus mittaustarkkuuteen

Edellä on oletettu, että liikennettä mitattaessa ei ole ollut estoa. Tähän tulisi tietenkin myös pyrkiä, sillä esto tekee mittaustulosten arvioinnin vaikeaksi. Teoreettisessa mallissa mittaustulosten tarkkuus voidaan vielä kohtuullisen hyvin arvioida.

Todellisella liikenteellä sen sijaan emme tiedä minkälaista liikenteen mallia tulisi soveltaa, esimerkiksi miten suuri osa estyneistä kutsuista uusiutuu. Jos kaikki kutsut uusiutuvat niin kauan, että ne saavat haluamansa palvelun, on välitetty liikenne ainakin hyvin lähellä tarjottua liikennettä. Sensijaan jos kutsujen uusiutumista ei tapahdu, saattaa tarjottu liikenne olla huomattavasti suurempi. Tämäkin voidaan vielä ottaa huomioon laskelmissa, jos kutsujen uusiutuminen tunnetaan.

Hyvin vaikeasti arvioitavissa oleva ongelma on sensijaan se, että esto voi vaikuttaa liikenteeseen pitkällä aikavälillä. Jos ihmiset tietävät, että tiettyä ajankohtana esto on suuri, he voivat siirtää esim. puhelunsa toiseen ajankohtaan. Liikenteen mittaus ei tällöin anna oikeaa kuvaa todellisesta tarpeesta. Tätä ongelmaa voi yrittää ratkaista esimerkiksi tarkastelemalla liikenteen profiilia. Jos kiiretunnin esto on suuri on liikenteen profiili on yleensä tavanomaista tasaisempi. Kiiretunnin liikennettä voidaan tällaisissa tapauksissa yrittää arvioida "standardi"-profiilin perusteella eli kiiretunnin liikenteen tulisi muodostaa määrätty osuus päivän kokonaisliikenteestä. Eli oletetaan, että estyneet puhelut siirtyvät toiseen ajankohtaan liikenteen kokonaismäärän pysyessä vakiona.

Odotusarvon tarkkuus

Tähän asti tarkastelu on suoritettu lähtien tunnetusta liikenteen mallista, josta on laskettu mittaustuloksen varianssi. Tavoitteena on kuitenkin laskea ehdollinen todennäköisyys $\Pr[A|A_m]$ eli todennäköisyys, että tarjotun liikenteen odotusarvo on A , kun mitattu liikenne on A_m (tarkastelu tapahtuu yhden liikenteen mallin puitteissa). Tämä voidaan laskea Bayesin kaavalla:

$$\Pr[A_i|A_m] = \frac{\Pr[A_i] \Pr[A_m|A_i]}{\sum_j \Pr[A_j] \Pr[A_m|A_j]} \quad (5.13)$$

jossa A_j ($j=1,2,3,\dots$) on mahdollinen tarjotun liikenteen arvo ja $\Pr[A_j]$ sen a priori todennäköisyys eli kyseisen arvon todennäköisyys ennen mittausta. $\Pr[A_m|A_j]$ on tuloksen A_m todennäköisyys valitun liikenteen mallin mukaan, kun tarjotun liikenteen arvo on A_j . Vastaavasti $\Pr[A_j|A_m]$ on tarjotun liikenteen aposteriori todennäköisyys eli todennäköisyys mittauksen jälkeen. Mahdollisia tarjotun liikenteen arvoja voi olla myös ääretön määrä, jolloin saadaan summan sijasta integraali. Eli mittaustulos A_m voidaan selittää erilaisilla liikenteen arvoilla A_j , joilla kullakin on apriori-todennäköisyys. Siten, jotta kaavaa 5.13 voitaisiin soveltaa, on tehtävä jokin oletus apriori-todennäköisyyksistä $\Pr[A_j]$.

Esimerkki 5.1.

Tämän esimerkin tarkoituksena on lähinnä kuvata mitatun tapahtuman vaikutusta siihen mitä voimme tietää todellisesta liikenneprosessista. Oleellisia seikkoja ovat: liikennemittausten tulkinta edellyttää aina jonkinlaiset lähtöoletukset siitä, mitä liikenne todennäköisesti on. Tärkeimmät oletukset koskee liikenneprosessin luonnetta (esimerkiksi että kyseessä on Poisson-liikenne) ja jos mittausdataa on hyvin vähän on oleellista myös se, minkälainen oletetaan tarjotun liikenteen keskiarvon olevan. Tehdään seuraava apriori-oletukset:

- liikenne on Poisson-jakautunut
- mahdollisia tarjotun liikenteen arvoja ovat:

$$0, 1, 2 \text{ ja } 3 \text{ Erl}$$

joista kunkin apriori todennäköisyys on 25 %, eli liikenteen odotusarvo ennen mittausta on 1,5 Erl.

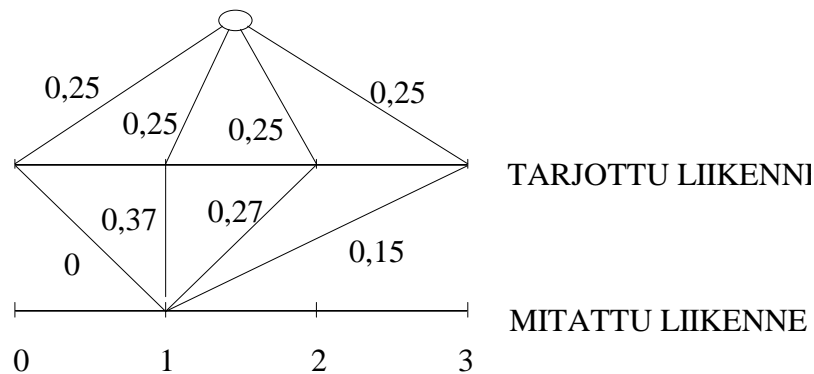
Havainto: Liikenteen arvo yhdellä satunnaisella hetkellä on 1.

Kysymys: Mikä on tarjotun liikenteen odotusarvo havainnon jälkeen?

Ratkaisu:

Lasketaan ensin kullakin tarjotun liikenteen arvolla tilan $p = 1$ todennäköisyys eli todennäköisyys, että järjestelmässä on 1 asiakas satunnaisella hetkellä.

$$\begin{aligned} \Pr(p, A) &= e^{-A\lambda p} / p! \\ \Pr(p=1, A=0) &= 0 \\ \Pr(p=1, A=1) &= 0,368 \\ \Pr(p=1, A=2) &= 0,271 \\ \Pr(p=1, A=3) &= 0,149 \end{aligned}$$



Kuva 5.2 Esimerkkitapauksen todennäköisyydet

Näistä saadaan aposteriori-todennäköisyydet:

$$\begin{aligned} \Pr(A=0; p=1) &= 0 \\ \Pr(A=1; p=1) &= \frac{0,25 \cdot 0,36}{0,25 \cdot 0,36 + 0,25 \cdot 0,27 + 0,25 \cdot 0,15} = 0,47 \\ \Pr(A=2; p=1) &= 0,34 \\ \Pr(A=3; p=1) &= 0,19 \end{aligned}$$

Tarjotun liikenteen odotusarvo havainnon $p=1$ jälkeen on siten:

$$\begin{aligned} E(A; p=1) &= 0,47 \cdot 1 + 0,34 \cdot 2 + 0,19 \cdot 3 \\ &= 1,72 \text{ Erl} \end{aligned}$$

Tulos on ehkä jossain määrin yllättävä: odotusarvo nousi 1,5:stä 1,72:een vaikka mittaustulos olikin 1 Erl. Tässä tapauksessa kasvu johtuu siitä, että mittaustulos sulki liikenteen arvon 0 pois. Jos toisenkin (edellisestä mittauksesta riippumattoman) mittauksen tulos olisi ollut myös 1, niin tarjotun liikenteen odotusarvoksi saataisiin 1,51 Erl. Tulos saadaan käyttämällä edellä saatuja todennäköisyyksiä apriori -todennäköisyyksinä. Eli mittaus muuttaa tietämystämme asian tilasta A tilaan B . Myös alkutila on tunnettava, jotta lopputila voitaisiin tarkasti määrittellä. Kuitenkin, jos mittaustulos on riittävän tarkka, ei alkutilalla ole käytännössä juurikaan merkitystä.

Soveltaminen

Mittaustulosten voidaan yleensä olettaa olevan normaalijakautuneita. Normaalijakautuman perusteella voidaan laskea, missä rajoissa mittaustulokset vaihtelevat määrättyllä todennäköisyydellä. Mittaustuloksille saadaan rajat:

$$A = E[A|A_m] \pm u_p \sqrt{V[A|A_m]} \quad (5.14)$$

jossa p on riskitaso. Taulukossa 5.3 on esitetty joitakin arvoja u_p :lle. Esimerkiksi u_p :n arvolla 1,96 on todennäköisyys, että liikenteen keskiarvo on kaavan 5.14 määrittämien rajojen ulkopuolella, 5%.

Taulukko 5.3. Kertoimen u_p arvoja eri riskitasoilla p .

$p\%$	u_p
50	0,6745
25	1,1503
10	1,6449
5	1,9600
1	2,5758
0,1	3,2905

Esimerkki 5.2.

Puhelinvaihteen liikennettä on mitattu kymmenenä työpäivänä. Kiiretunnin liikenteen keskiarvoksi on saatu 10 Erl. Keskimääräinen puhelun pituus on 3 minuuttia. Mikä on tarjottu liikenne 5% riskitasolla.

Tarkastellaan seuraavia malleja:

1. Poisson-liikenne, jatkuva mittaus (kaava 5.4)
2. Poisson-liikenne, näytteenotto, $t_s = 1$ min (5.5)
3. Palveluaikajakauman hajontakerroin $c_h = 2,3$ (5.8)
4. Kiiretuntien keskiarvojen varianssi $V_t = 1$ (5.10-11)
5. Johtojen määrä $S = 15$, ei kutsujen uusiutumista
6. $S = 15$, estyneet kutsut uusiutuvat todennäköisyydellä $P_r = 80\%$
7. $S = 12$, $P_r = 0$
8. $S = 12$, $P_r = 80\%$

Taulukko 5.4. Liikennemittauksen tarkkuus erilaisilla liikenteen malleilla.

malli	$E[A A_m]$	$V[A A_m]$	$p = 5\%$	
			A_{max}	A_{min}
1	10,00	0,100	9,38	10,62
2	10,00	0,101	9,38	10,62
3	10,00	0,165	9,20	10,80
4	10,00	0,200	9,12	10,88
5	10,50	0,162	9,71	11,29
6	10,13	0,107	9,49	10,77
7	13,39	0,595	11,88	14,90
8	10,84	0,162	10,17	11,51

Tuloksista havaitaan, että näytteenottoperiaate ei tässä tapauksessa heikennä mittauksen tarkkuutta juuri ollenkaan. Sensijaan sekä palveluajan jakaumalla että keskiarvojen jakaumalla on useissa tapauksissa merkittävä vaikutus. Taulukosta nähdään myös, että esto tekee mittaustulosten arvioinnin hyvin vaikeaksi; edes tarjotun liikenteen (keskimääräistä) odotusarvoa ei voida määrittää ellei kutsujen uusiutumista tunneta tarkasti (mallit 7 ja 8).

EI JAETTU OPISKELIJOILLE:

MITTAUSTULOSTEN KÄYTTÖ ENNUSTAMISESSA

Miten mittaustulokset voidaan liittää ennustamiseen? Mittausten tavoitteenahan on yleensä osata mitoittaa järjestelmä tulevaa tarvetta varten. Oletetaan, että on suoritettu yksi liikennemittaus, jonka tuloksen tarkkuus on arvioitu edellä esitettyjen periaatteiden mukaisesti. Tunnetaan siis:

$$E[A(t_0)] = \text{tarjotun liikenteen odotusarvo} \\ \text{hetkellä } t_0$$

$$V[A(t_0)] = \text{tarjotun liikenteen (odotusarvon)} \\ \text{varianssi hetkellä } t_0$$

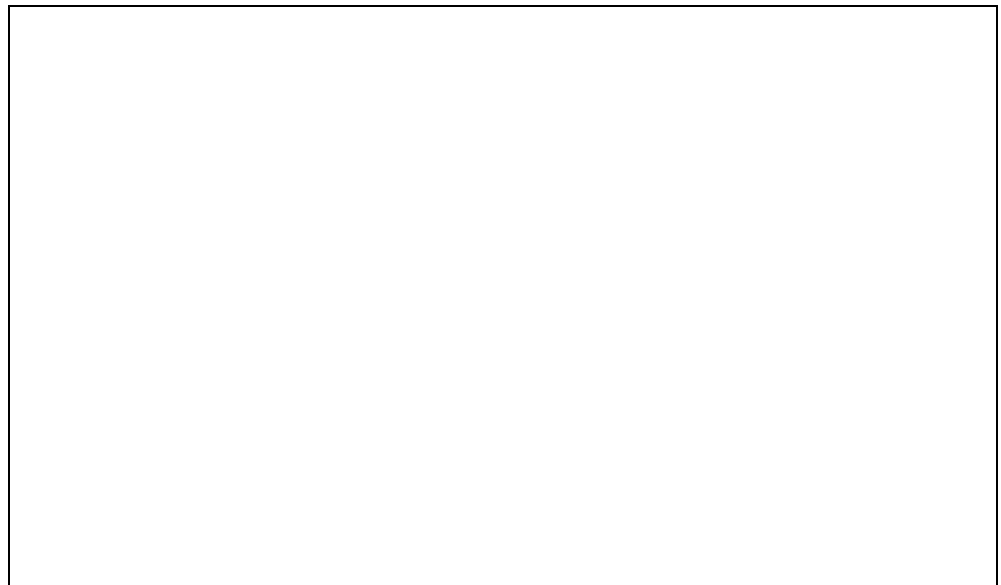
Entä mikä on ennustamisen tarkkuus, jos oletetaan että tietyn hetken tilanne tunnetaan tarkasti. Jälleen kerran vastaus riippuu siitä, mitä asioita otetaan huomioon. Lähdetään liikenteen käyttäytymisestä ja siihen liittyvistä vaihteluista:

- liikenteen satunnaisuus (kiiretunnin sisällä)
- vaihtelu vuorokauden ajan suhteen
- vaihtelu viikonpäivän mukaan
 - säännöllinen
 - satunnainen
- kausivaihtelu, aikavakio viikosta vuoteen
 - säännöllinen
 - satunnainen
- pitkän aikavälin kehitys (trendi)

Osa vaihteluista on siis säännöllisiä osa satunnaisia: eri päivien profiilit ovat yleensä hyvin samankaltaisia, sensijaan eri päivien kiiretuntien sisällä liikenne on satunnaista. Säännöllisillä vaihteluilla ei ole juurikaan merkitystä sen enempää mittauksen kuin ennustamisen tarkkuuden kannalta (säännöllisyydellä tarkoitetaan tässä oikeastaan ennustettavuutta).

Mittausjaksoa lyhyemmät vaihtelut tulevat esille mittausten tarkkuudessa eli laskettaessa tarjotun liikenteen odotusarvon varianssia. Ennustamisen tarkkuuden kannalta

ovat oleellisia siten hitaat, satunnaiset vaihtelut sekä pitkän aikavälin kehityksen ennustamiseen liittyvä epätarkkuus. Mittaustarkkuuteen vaikuttavia tekijöitä on yhdistetty kuvassa 5.4.



Kuva 5.4. Liikenteen ennustamiseen liittyvä epätarkkuus.

Pyritään arvioimaan liikennettä ajankohtana t_2 . Ennustettavan liikenteen mittaustarkkuuteen vaikuttaa siten mittaukseen liittyvä epätarkkuus:

$$V[A_o(t_1) | A_m(t_1)],$$

ennustamiseen liittyvä epätarkkuus:

$$V[A_o(t_2) | A_o(t_1)],$$

sekä mittauksen epätarkkuus hetkenä t_2 :

$$V[A_m(t_2) | A_o(t_2)].$$

Jos tavoitteena on järjestelmän mitoitus, ei mittauksen epätarkkuudella hetkenä t_2 ole vaikutusta (jos tarkastellaan ainoastaan liikenteen, estojen jne. keskiarvoja).

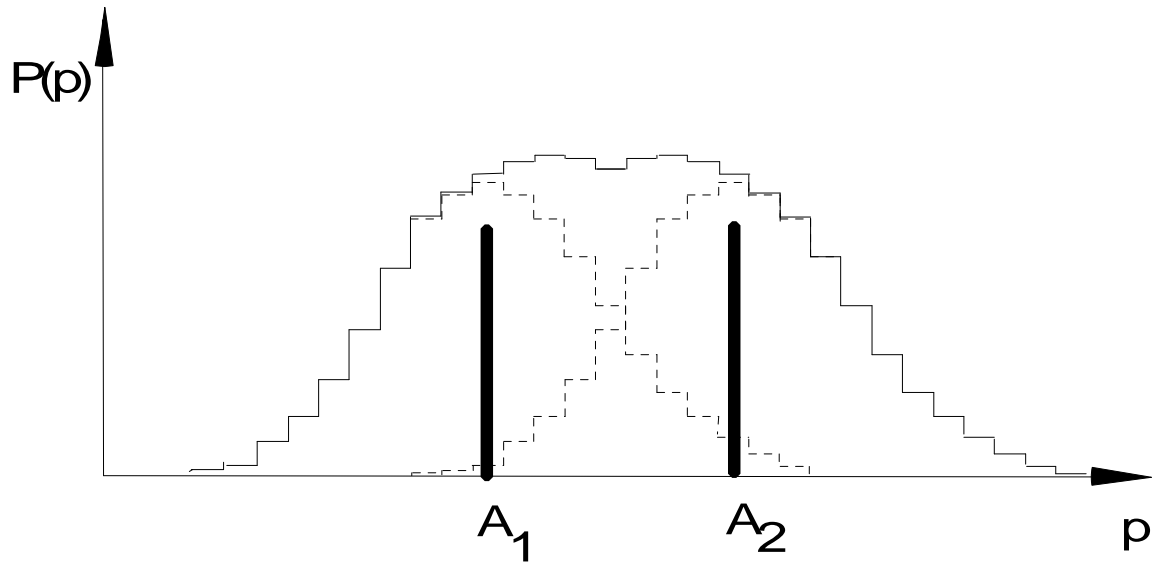
Miten ennustamisen tarkkuus voidaan arvioida? Ensiksikin on huomattava, että yhden mittauksen perusteella ei voida ennustaa vaan tarvitaan pitempiäaikaisia mittauksia, sillä ennustamiseenkin tarvitaan malli.

Yksinkertaisin malli on eksponentiaalinen kasvu (vertaa kuva 1.4). Kasvuprosenttikin on ennustettava jne. Pitkällä aikajaksolla ennustamisen epätarkkuus voi olla hyvinkin huono varsinkin jos tarkastellaan yksittäisiä väyliä, joiden liikenteessä näkyvät pienetkin muutokset tilaajien liikennetarpeissa. Suhteellisesti mitattuna (hajonta/keskiarvo)

liikenteen ennustamisen virhe on siten yleensä parempi suurilla väylillä, joilla yhdistyy toisistaan riippumattomia liikennevirtoja.

$$A_1 = 5 \quad P[A_1] = 0,5$$

$$A_2 = 15 \quad P[A_2] = 0,5$$

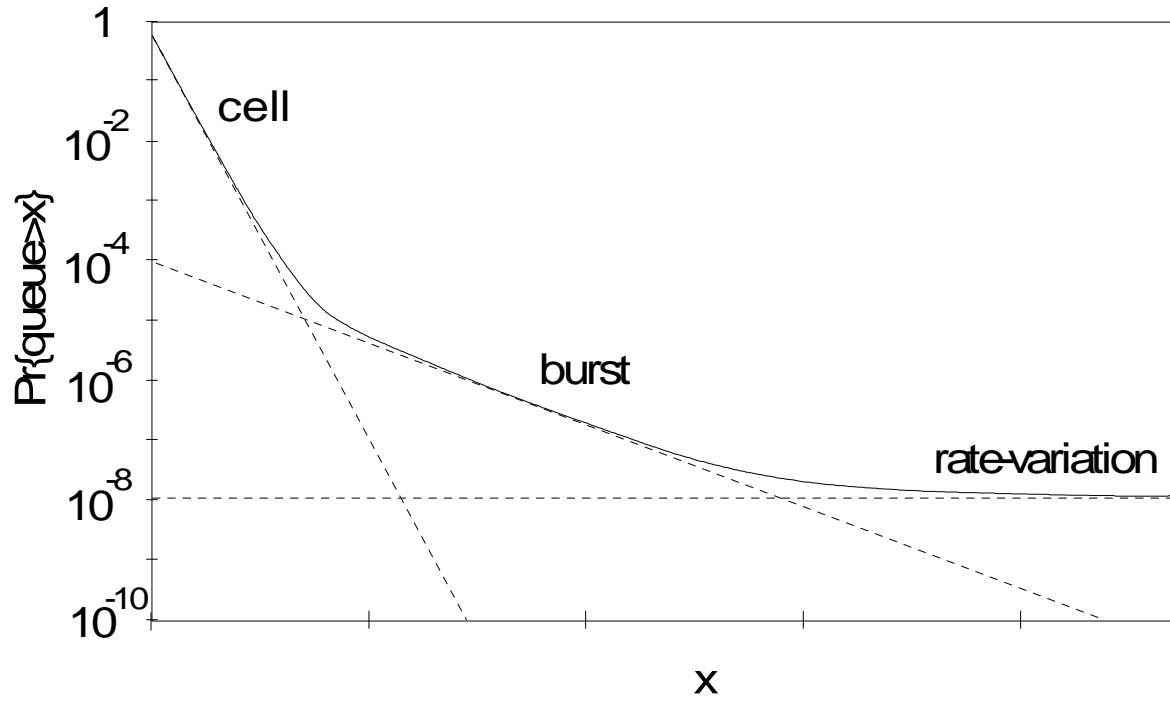


a) $z_x = 1, z_t = 0$

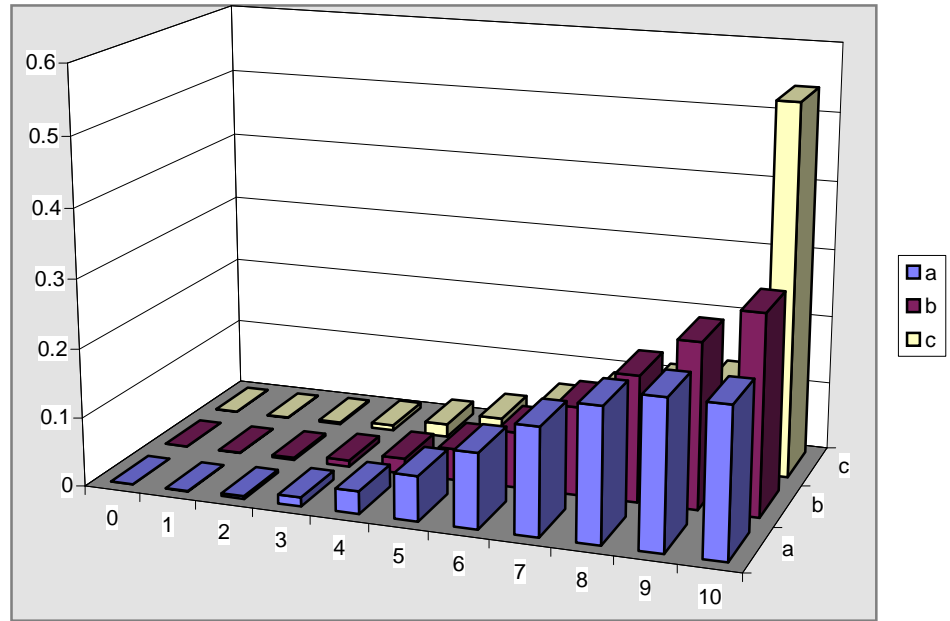
b) $z_x = z_t = 0,5$

c) $z_x = 0, z_t = 1$

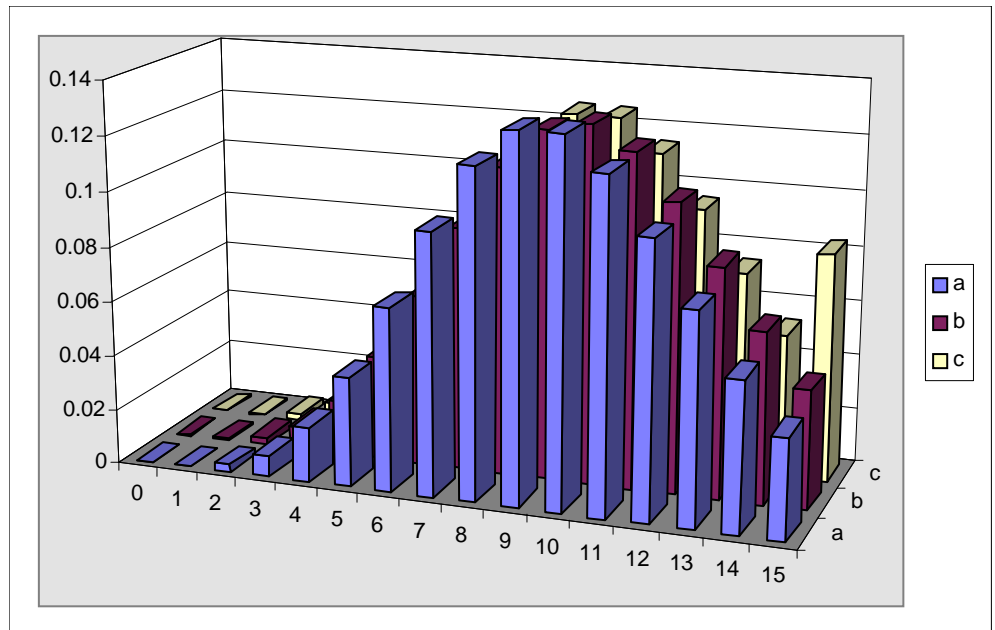
S	liikenne a		liikenne b		liikenne c	
	B _t = B _a %	%	B _t	B _a %	B _t	B _a %
10	21,46		28,82	17,70	54,21	12,51
11	16,32		21,71	12,82	41,70	8,34
12	11,97		15,62	8,91	30,32	5,31
13	8,43		10,71	5,91	20,84	3,22
14	5,68		6,97	3,73	13,55	1,87
15	3,65		4,30	2,24	8,35	1,03
16	2,23		2,50	1,27	4,87	0,55
17	1,29		1,37	0,68	2,70	0,28
18	0,71		0,71	0,34	1,43	0,13
19	0,37		0,35	0,16	0,72	0,06
20	0,19		0,16	0,07	0,35	0,03



**Cell, burst and rate-variation scale components
of queue length distribution.**



Kuva 4.2. Liikenteen jakauma eri liikennetyypeillä,
 $A = 10, z = 1, S = 10$.



Kuva 4.3. Liikenteen jakauma eri liikennetyypeillä,
 $A = 10, z = 1, S = 15$.

Taulukko 5.4. Liikennemittauksen tarkkuus erilaisilla liikenteen malleilla.

malli	$E[A A_m]$	$V[A A_m]$	$p = 5\%$	
			A_{max}	A_{min}
1	10,00	0,100	9,38	10,62
2	10,00	0,101	9,38	10,62
3	10,00	0,165	9,20	10,80
4	10,00	0,200	9,12	10,88
5	10,50	0,162	9,71	11,29
6	10,13	0,107	9,49	10,77
7	13,39	0,595	11,88	14,90
8	10,84	0,162	10,17	11,51