Kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen

Matti K. Sinisalo

1.5.2013

Kolmannen asteen yhtälön yleinen ratkaisukaava siinä muodossa, jossa se yleensä esitetään, täyttää yksinään kokonaisen sivun. Useimmille lukioikäisille pitkänkin matematiikan lukijoille tämä esitys muodostaa jo sellaisenaan ylipääsemättömän esteen yhtälöiden ratkaisemisesta kiinnostumiselle. Näin ei tarvitsisi kuitenkaan olla. Yleisyyttä menettämättä ratkaisukaava voidaan kirjoittaa varsin siistin näköiseen ja käyttökelpoiseen muotoon, kuten seuraavassa pyrin osoittamaan.

Kolmannen asteen yhtälöllä tarkoitetaan muotoa

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

olevaa yhtälöä, missä A on nollasta eroava.

Koko yhtälö voidaan jakaa puolittain kolmannen asteen termin kertoimella.
Yhtälö voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Merkitään $q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Tällöin $q'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ja $q''(x) = 6x + 2a$. Asettamalla $q''(x_0) = 0$ saadaan käännepiste $x_0 = -a/3$.

Merkitsemällä $x = x_0 + t$ saamme

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow q(x_0 + t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - \frac{a}{3})^3 + a(t - \frac{a}{3})^2 + b(t - \frac{a}{3}) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 + (b - \frac{a^2}{3})t + (\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c) = 0.$$

Aito kolmannen asteen yhtälö voidaan siis aina kirjoittaa muotoon, jossa kolmannen asteen termin kerroin on 1 ja toisen asteen termi puuttuu.

Edellä esitetyn perusteella kolmannen asteen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$t^3 = 3mt + 2n.$$

Jos $m = 0$, yhtälön ratkaiseminen on triviaalia. Voimme siis olettaa, että m on nollasta eroava.

Lause 1: Jos kompleksiluku m on nollasta eroava,
1) $r^2 = n^2 - m^3$
2) $s^3 = n + r$ **ja**
3) $t = s + \frac{m}{s}$**,**
niin $t^3 = 3mt + 2n$**.**

Todistus. Väitämme, että s on nollasta eroava. Jos nimittäin olisi $s = 0$, niin

$$s = 0 \Leftrightarrow s^3 = 0 \Leftrightarrow n + r = 0 \Rightarrow n^2 = r^2 \Leftrightarrow n^2 = n^2 - m^3 \Leftrightarrow m = 0.$$

Tämä on ristiriita.

Edelleen

$$t^3 = (s + \frac{m}{s})^3 = s^3 + \frac{m^3}{s^3} + 3m(s + \frac{m}{s}) = n + r + \frac{n^2 - r^2}{n + r} + 3mt$$

$$= n + r + \frac{(n-r)(n+r)}{n+r} + 3mt = n + r + (n - r) + 3mt = 3mt + 2n.$$

Näin väite on todistettu. **MOT**

Tätä tulosta käyttäen kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen onnistuu varsin helposti.

Aluksi valitaan luvuille m ja n sellaiset arvot, jotka vastaavat ratkaistavana olevaa kolmannen asteen yhtälöä.

Kohdassa 1) voidaan valita kumpi tahansa mahdollisista r:n arvoista.

Kohdassa 2) valitaan s:n arvoksi mikä tahansa kolmas juuri.

Jos halutaan tietää vain yksi ratkaistavan kolmannen asteen yhtälön juuri, sijoitetaan tämä s:n arvo kohtaan 3).

Muita kahta ratkaistavana olevan kolmannen asteen yhtälön juurta vastaavat arvot saadaan kertomalla tämä ykkösen kolmannella ykkösestä eroavalla juurella yhden ja kaksi kertaa. Siis $s_1 = s$, $s_2 = \alpha s$ ja $s_3 = \alpha^2 s$, missä $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Sijoittamalla nämä s:n arvot saadaan kaikki ratkaistavan kolmannen asteen yhtälön juuret selville, kuten seuraavassa osoitetaan.

Lause 2: Olkoot m, n, r, s ja t kuten lauseessa 1). Olkoon $\alpha^3 = 1$, missä α eroaa luvusta 1. Jos $t_1 = s + \frac{m}{s}$, $t_2 = \alpha s + \frac{m}{\alpha s}$ ja $t_3 = \alpha^2 s + \frac{m}{\alpha^2 s}$, niin

$$(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = t^3 - 3mt - 2n.$$

Todistus: Nyt $0 = \alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$. Koska α eroaa luvusta 1, on $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ ja $\alpha + 1 = -\alpha^2$.

Edelleen saamme

$$t_1 + t_2 + t_3 = s + \frac{m}{s} + \alpha s + \frac{m}{\alpha s} + \alpha^2 s + \frac{m}{\alpha^2 s}$$

$$= (1 + \alpha + \alpha^2)s + \frac{(1 + \alpha + \alpha^2)m}{\alpha^2 s} = 0,$$

$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = (s + \frac{m}{s})(\alpha s + \frac{m}{\alpha s}) + (s + \frac{m}{s})(\alpha^2 s + \frac{m}{\alpha^2 s}) + (\alpha s + \frac{m}{\alpha s})(\alpha^2 s + \frac{m}{\alpha^2 s})$$

$$= \alpha s + \frac{m}{\alpha} + \alpha m + \frac{m^2}{\alpha s^2} + \alpha^2 s^2 + \frac{m}{\alpha^2} + m\alpha^2 + \frac{m^2}{\alpha^2 s^2} + s^2 + \frac{m}{\alpha} + m\alpha + m^2 s^2$$

$$= (1 + \alpha + \alpha^2)s^2 + \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{\alpha^2}\frac{m^2}{s^2} + (\frac{2}{\alpha} + 2\alpha + \frac{1}{\alpha^2} + \alpha^2)m$$

$$= \frac{3(\alpha + 1)}{\alpha^2}m = \frac{-3\alpha^2}{\alpha^2}m = -3m,$$

$$t_1t_2t_3 = (s + \frac{m}{s})(\alpha s + \frac{m}{\alpha s})(\alpha^2 s + \frac{m}{\alpha^2 s})$$

$$= s^3 + \frac{ms}{\alpha} + \alpha ms + \frac{m^2}{s} + ms + \frac{m^2}{\alpha s} + \frac{\alpha m^2}{s} + \frac{m^3}{s^3}$$

$$= (s^3 + \frac{m^3}{s^3}) + \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{\alpha^2}ms + \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{\alpha^2}\frac{m^2}{s}$$

$$= n + r + \frac{n^2 - r^2}{n + r} = 2n$$

ja

$$(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3) = t^3-(t_1+t_2+t_3)t^2+(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)t-t_1t_2t_3 = t^3-3mt-2n.$$

Näin väite on todistettu. **MOT**

Huomautuksia

Esitetty menetelmä sopii hyvin symboliseen ja numeriseen laskentaan ja tietokoneelle ohjelmoitavaksi.

Laskuvaiheet on helppo tarkistaa kussakin vaiheessa taaksepäin laskemalla.